数学分析（甲）II（H）2023-2024 春夏期末

图灵回忆卷

2024 年 6 月 20 日

一、(10 分) 叙述二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微的定义，并且证明以下函数在 $(0,0)$ 处可微.

$$f(x,y)=\begin{cases} y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

二、(32 分) 计算：

1. 求 $\displaystyle\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$;

2. 对于曲线 $L\colon y=\displaystyle\int_0^x\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$，求 $\displaystyle\int\limits_L x\,\mathrm{d}s$;

3. 对于曲线 $L\colon y=\sin x$，方向为从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$，求 $\displaystyle\int\limits_L (e^x\sin y-y^2)\,\mathrm{d}x+e^x\cos y\,\mathrm{d}y$;

4. 对于圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$，方向为下侧，求 $\displaystyle\iint\limits_S y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

三、(10 分) 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上存在连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq 0$，$z$ 满足 $f(x-z,y-z)=0$，证明：上式确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

四、(10 分) 利用条件极值证明 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距离为

$$\rho=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

五、(10 分) 叙述函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 一致收敛的 Dirichlet 判别法，并证明函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos(nx)}{n^2+1}$$

在 $(0,2\pi)$ 内闭一致收敛.

六、(10 分) 求周期为 2 的函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in[0,1) \\ 0 & x\in[-1,0) \end{cases}$$

的傅立叶展开，与该傅里叶级数在 $[-1,1]$ 上的取值.

七、(10 分) 叙述常数项级数收敛的 Cauchy 准则并证明：若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛，则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

八、(8 分) 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 存在二阶连续偏导数，对任意的 $\theta\in[0,2\pi)$ 定义函数

$$g_\theta(t)=f(t\cos\theta,t\sin\theta).$$

若对于任意的 $\theta\in[0,2\pi)$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}g_\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2g_\theta}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}>0$，证明：$f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值.