# 数分 2(H)2020 春夏期末 (回忆版)

20 级图灵倾情出品

2021 年 7 月 2 日

1.(1)叙述二元函数$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$可微的定义

(2)用定义证明$f(x,y)=(xy)^{\frac{5}{7}}$在 (0,0) 可微

2.证明或举反例 (用严格的论据)

(1)证明$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$收敛，$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$发散

(2)对数项级数$\sum u_n,\sum v_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$，能否说明$\sum u_n,\sum v_n$同敛散？

如果能，给出证明；如果不能，给出反例。

3.(1)求$\int_L\frac{e^{2x}\ln(1+e^{2x})}{\sqrt{1+e^{2x}}}\mathrm{d}s$，设$L:y=e^x,x\in[0,1]$

(2)求$\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，设$V$是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$与$z\leqslant 0$的相交区域

(3)求$\oint_L\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$，设$L$是$|x|+|y|\leqslant 2$的边界, 并沿逆时针方向

(4)求$\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，设$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,x^2+y^2+z^2=1\}$

4.利用条件极值，证明$P(x_0,y_0,z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离为

$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

5.(1)叙述函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $I$ 上一致收敛的定义

(2)设 $f(x)$ 定义于 $(a,b)$，且具有一阶连续导函数，$\forall x\in(a,b),f_n(x)=n\left(f(x+\frac{1}{n})-f(x)\right)$

求证：$\{f_n\}$ 在 $(a,b)$ 上内闭一致收敛

6.设$f(x)=\pi-x,x\in(0,\pi)$。先将$f(x)$奇延拓为$(-\pi,\pi)$上的奇函数，再周期延拓为$\mathbb{R}$上的以$2\pi$为周期的周期函数，仍记为$f$

(1)求 $f$ 的 Fourier 级数，并求 $f$ 的 Fourier 级数在$[-\pi,\pi]$上的取值

(2)求证：$f$ 的 Fourier 级数在 $(0,\pi)$ 不是一致收敛的

7.设二元函数 $f(x,y)$ 有连续的二阶偏导数

(1)若 $P_0(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的稳定点，$f$ 在 $P_0$ 的黑塞矩阵正定，求证：$f(x,y)$ 在 $P_0$ 取极小值

(2)若 $f$ 在每个点的黑塞矩阵都正定，求证：$f$ 至多有一个稳定点