# 2024 - 2025学年数学分析I (H)期末试题答案

**jayi0908**

## 一、 计算题

(1) 由定积分定义，令$f(x)=\ln(1+x)$，则
原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{k}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2\ln 2-1.$

(2) 由洛必达法则，令$u=\sqrt{t}$，则
原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x 2u\sin^2 u\mathrm{d}u}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin^2 x}{4x^3}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

(3) $f'(x)=(1+x)\arctan x$，则

$x\leq -1$时，$f'(x)>0$

$-1<x<0$时，$f'(x)<0$

$x\geq 0$时，$f'(x)>0$

故$f(x)$的极大值为$f(0)=0$，
由分部积分，极小值为

$$\begin{aligned}
f(-1)&=\int_0^{-1}(1+x)\arctan x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}(1+x)^2\arctan x|_0^1-\int_0^{-1}\frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{2}-\int_0^{-1}\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\int_0^{-1}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}\\
&=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)|_0^{-1}\\
&=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

(4) 代入 $x=0$ 到第一个方程得 $\sin t+2t=0$，
由函数 $y=\sin x+2x$ 单增知 $t=0$ 为唯一解，代入第二个方程得 $y=\dfrac{\pi}{2}$.
由第二个式子解得$t=\dfrac{y-\frac{\pi}{2}}{\sin y}$，代回第一个式子得$e^x=\sin\dfrac{y-\frac{\pi}{2}}{\sin y}+2\dfrac{y-\frac{\pi}{2}}{\sin y}+1.$
两边对$x$求导得$e^x=\dfrac{\cos\dfrac{y-\frac{\pi}{2}}{\sin y}\left(y'\sin y-\left(y-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos y\right)}{\sin^2 y}+2\dfrac{y'\sin y-\left(y-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos y}{\sin^2 y}.$
代入 $x=0,y=\dfrac{\pi}{2}$ 得 $1=3y'|_{x=0}$，故$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=0}=\dfrac{1}{3}.$

(5)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx &= -\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\frac{1}{1+e^x}\\ &= \frac{-x}{1+e^x}|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x(1+e^x)}\mathrm{d}e^x\\ &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t\\ &= \ln\frac{t}{t+1}|_1^{+\infty}\\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

二、 确界原理：非空有上界的实数集必有上确界，非空有下界的实数集必有下确界.

证明：对 $\forall x_0\in(0,1)$，由于 $f$ 在 $(0,1)$ 上单增，故 $x_0$ 左侧的函数值均小于 $f(x_0)$，

令$E=\{f(x)|x\in(0,1),x<x_0\}$，则 $E$ 非空有上界，故 $\exists a=\sup E$，

由确界定义，$\forall\varepsilon_1>0,\exists x_1\in(0,1),x_1<x_0$，使得 $a-\varepsilon_1<f(x_1)\le a$.

则 $\forall\varepsilon_2\in(0,a-f(x_1)),\exists x_2\in(x_1,x_0),$，使得 $f(x_1)<a-\varepsilon_2<f(x_2)<a$.

同理可一直构造出 $x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots<x_0$，使得 $f(x_{n-1})<a-\varepsilon_n<f(x_n)<a$，

且 $\{a-f(x_n)\}$ 收敛于 0.

由$f$单调性不难知 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$，即左极限存在。同理右极限存在。故不存在第二类间断点

易知 $f$ 作为连续区间上的单增函数不存在可去间断点，故其间断点只能是跳跃间断点，得证.

三、 证明：$x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{4(1-x_n)}-x_n=\dfrac{(1-2x_n)^2}{4(1-x_n)}>0$，故 $\{x_n\}$ 单调递增.

且若 $x_n<\dfrac{1}{2}$，则 $x_{n+1}=\dfrac{1}{4(1-x_n)}<\dfrac{1}{4(1-\frac{1}{2})}=\dfrac{1}{2}$，故 $\{x_n\}$ 有上界. 故 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a=\dfrac{1}{4(1-a)}$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$.得证.

四、 由导数局部保号性与拉格朗日中值定理，

$\exists x_1\in U_+^o(0),x_2\in U_-^o(2025),\exists\xi_1\in(0,x_1),\exists\xi_2\in(x_2,2025)$，

使得$f(x_1)=f'(\xi_1)x_1>0,f(x_2)=f'(\xi_2)(x_2-2025)<0$，由$f$连续及零点存在性定理得证.

五、 一致连续：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y\in I,|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，则称$f$在$I$上一致连续.

证明：不难证明，若$f$在$I_1$上一致连续，在$I_2$上也一致连续，且$I_1$与$I_2$为两个相接的区间，则$f$在$I_1\cup I_2$上一致连续.

(只需任取$\dfrac{\varepsilon}{2}$，相应的有两个$\delta_1,\delta_2$，取$\delta=\min\delta_1,\delta_2$，则可证明$\forall x,y\in I_1\cup I_2,|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$)

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{-1}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=0$，故$f(x)$在$(0,1]$上一致连续.

故只需证明$f(x)$在$(1,+\infty)$上一致连续.

由拉格朗日中值定理，只需证明$f'(x)$在$(1,+\infty)$上有界.

$f'(x)=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{2\ln\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}=\frac{\ln t+1}{t}$.

其中$t=\sqrt{x}$，且不难证明在$(1,+\infty)$上$0<\frac{\ln t+1}{t}<1$恒成立，得证.

六、 注意到$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$，故只需证明$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x\le f(\int_0^1 x^2\mathrm{d}x)$.

由定积分定义与琴生不等式，

$$\begin{aligned}f(\int_0^1 x^2\mathrm{d}x)&=f(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2})\\&\ge\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k^2}{n^2})\\&=\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

得证。

七、 $f\in C[0,1]$,证明：

(1)令$F(t)=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x+\int_{1-t}^1 f(x)\mathrm{d}x, t\in[0,\frac{1}{2}]$. 则由$f\in C[0,1]$知$F(t)\in C[0,\frac{1}{2}]$，且$F(0)=0, F(\frac{1}{2})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

由介值定理，$\exists\xi\in[0,\frac{1}{2}]$,使得$F(\xi)=\frac{1}{2}F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(2)不成立，反例： $f(x)=\cos 2\pi x$，则$F(t)=\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x|_0^t+\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x|_{1-t}^1=\frac{1}{\pi}\sin 2\pi t$，

$F(0)=F(\frac{1}{2})=0$，但不存在$\xi\in(0,\frac{1}{2})$使得$F(\xi)=0$，故结论不成立.