

# 2022-2023 秋冬概率论 (H) 回忆卷

HobbitQia

1. (10 分)

(a)  $0 < P(B) < 1$  证明:  $AB$  独立当且仅当  $P(A|B) = P(A|\bar{B})$

(b)  $A, B, C$  两两独立,  $ABC = \emptyset$   $P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$ ,  $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$  求  $P(A) = ?$

2. (10 分)

假设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  独立同分布, 取  $\pm 1$  的概率各为  $\frac{1}{2}$ , 记  $S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i$ , 求

(a)  $P(S_5 = 1) = ?$

(b)  $P(S_5 = 1 | S_2 = 0) = ?$

(c)  $P(S_2 = 0 | S_5 = 1) = ?$

3. (15 分)

二维随机向量  $(X, Y)$  密度函数  $f(x, y) = \frac{e^{-y}}{y} e^{-\frac{x}{y}}$ ,  $0 < x < \infty, 0 < y < \infty$ , 求

(a)  $E(X|Y = y) = ?$

(b)  $EX = ?$

4. (20 分)

$X, Y$  是独立同分布的几何随机变量,  $P(X = k) = pq^{k-1}, k = 1, 2, \dots$ , 令  $U = \min\{X, Y\}$ ,  $V = X - Y$

(a) 求  $U, V$  的分布

(b)  $U, V$  独立吗?

5. (15 分)

$Var(X) = 16, Var(Y) = 9, Cov(X, Y) = -6$  则  $\rho_{3X+2, 2Y-1} = ?$

6. (20 分)

盒子里有  $\frac{1}{6}$  的黑球, 有放回地抽取 600 个, 求黑球所占比例与  $\frac{1}{6}$  之差不超过 0.02 的概率。

(a) 用切比雪夫不等式估计下界

(b) 用中心极限定理近似计算 (参考:  $\Phi(0.65) = 0.742, \Phi(1.2) = 0.885, \Phi(1.31) = 0.905$ )

7. (10 分)

一列独立随机变量  $\{\xi_n\}, n \geq 1$ . 其中  $\xi_1 \sim U(-1, 1)$  当  $n \geq 2$  时  $\xi_n \sim N(0, 2^{n-1})$  令  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, B_n = Var(S_n), X_n = \frac{S_n}{\sqrt{B_n}}$  求证: 当  $n \rightarrow \infty$  时  $X_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$