概率论和数理统计 2025 秋冬期末

图灵回忆卷

2026 年 1 月 13 日

一、(33 分，每空 3 分) 填空题:

1. A 和 B 为两事件，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，则 $P(A\cup B)$ 的最大值为 _______. 若 $P(AB)=P(B-A)$，则 $P(B|A)=$ _______.

2. $(X,Y)\sim N(0,1;1,4;\rho)$，$Z_1=X-1$，$Z_2=X-2Y$，则 Z_1 和 Z_2 的协方差矩阵为 _______. 若 Z_1 和 Z_2 独立，则 $\rho=$ _______.

3. 零件寿命 X 服从参数为 λ 的指数分布，$\lambda>0$ 未知，单位为年，则 $P(X>3|X>1)=$ _______. 若从大量零件中随机抽了 30 件，其中恰好有 15 件的寿命大于 2 年，则 λ 的极大似然估计值为 _______.

4. 设 $X\sim N(\mu,4)$，$\mu\in\mathbf{R}$ 未知，从中抽取简单随机样本 $X_1,\dots,X_n$，$n\geq 2$，设样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. 设 $H_0:\mu=1$，$H_1:\mu>1$，则拒绝域为 _______；若已知 $\mu=1.2$，则犯第二类错误的概率为 _______（提示：$\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数）；现再次随机独立地抽取得到两个新样本 X_{n+1},X_{n+2}，且 $\dfrac{a\overline{X}-X_{n+1}-X_{n+2}}{bS}\sim t(k)$，则常数 $(a,b,k)=$ _______；若已知 $n=200$，则 $P(\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2)>150=$ _______.

5. 设 $X_1,\dots,X_4$ 为独立的随机变量且均服从参数为 0.8 的 0-1 分布，则 $\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{3}X_kX_{k+1})=$ _______.

二、(15 分) 设某地出现雾霾的概率为 0.2, 在雾霾天, 该地居民独立地以 0.6 的概率戴口罩; 在非雾霾天, 该地居民独立地以 0.05 的概率戴口罩.

(1) 在该地随机选一位居民, 求其戴口罩的概率;

(2) 若在该地同时选 2 位居民, 求两位居民都不戴口罩的概率.

三、(20 分) 设随机变量 X,Y 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}2y, & 0<x<1\text{且}\sqrt{1-x}<y<\sqrt{2-x}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

(1) 求 X 和 Y 各自的边际密度函数，判断 X 和 Y 是否独立，并说明理由.

(2) 求 $\{X=x\}$（$0<x<1$）情况下的条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$.

(3) 设 $Z=X+Y^2$，求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$.

(4) 求 $P(X<0.8|X+Y^2=1.6)$.

四、(16 分) 设 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{\theta^2}, & |x|\leq\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 为未知参数. 从总体 X 中抽取得到简单随机样本 $X_1,\dots,X_n$.

(1) 求 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}_1$ 和极大似然估计值 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$.

(2) 求以 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$ 作为 θ 的估计值的均方误差.

(3) 设一系列相互独立的随机变量 Y_j 的概率密度函数 $f_{Y_j}(y) = \begin{cases} \dfrac{j|y|^{j-1}}{2}, & |j| \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, 判断 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} Y_j$ 是否依概率收敛于 0? 并说明理由.

五、(16 分) 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，$X$ 和 Y 相互独立，$\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ 均未知. 现从 X 和 Y 中分别抽取简单随机样本 $X_1, \ldots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$，已知 $n_1 = n_2 = 5$，样本均值和样本方差分别为 $\overline{X} = 78$，$\overline{Y} = 85$，$S_1^2 = 3.6$ 和 $S_2^2 = 4$.

(1) 设 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$，$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$，以 $\alpha = 0.05$ 为显著性水平，判断接受还是拒绝 H_0.

(2) 若 $\sigma_1 = \sigma_2$，求 $\mu_1 - \mu_2$ 置信水平为 0.95 的双侧等尾置信区间，并判断 μ_1 和 μ_2 差异的显著性.