数学分析（甲）II（H）2024-2025 春夏期末

图灵回忆卷

2025 年 6 月 13 日

一、(10 分) 叙述二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微的定义，并且证明以下函数在 $(0,0)$ 处可微.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

二、(40 分) 计算：

1. 求由 $\begin{cases}x^2+y^2+ze^z=2\\ x^2+xy+y^2=1\end{cases}$ 确定的空间曲线在 $(1,-1,0)$ 处的切线;

2. 求 $I_1=\iint_D|y-x^2|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=[-1,1]\times[0,2]$;

3. 对于曲线 $L\colon y=\sqrt{1-x^2}$，方向为从 $(1,0)$ 到 $(-1,0)$，求

$$I_2=\int_L(-2xe^{-x^2}\sin y-y)\,\mathrm{d}x+e^{-x^2}\cos y\,\mathrm{d}y\,;$$

4. 对于曲面 $S\colon x^2+y^2+z^2=1,z\geq 0$，取上侧，求

$$I_3=\iint_S(x^2-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^2-y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z^2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,;$$

5. 求

$$I_4=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

三、(10 分) 设二元函数 $f(x,y)$ 定义在 $D=(0,1)\times(0,1)$ 上，$f'_y(x,y)$ 有界，且对于固定的 y，$f(x,y)$ 对于 x 连续，证明：f 在 D 上连续.

四、(10 分) 对于 $f(x,y,z)=2x^2+2xy+2y^2-3z^2$，$\vec{l}=(1,-1,0)$，$P$ 在 $S\colon x^2+2y^2+3z^2=1$ 上，求 $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{l}}(P)$ 的最大值.

五、(10 分) 对于函数 $f(x)=1+x$，$x\in[0,\pi]$，有 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}$.

六、(10 分) 函数列 $\{f_n\}$ 满足：$f_1(x)=f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数，且对于 $\forall n\in\mathbb{N}_+$，$\forall x\in[0,1]$，有

$$f_{n+1}(x)=\int_x^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

七、(10 分) $\{a_n\}$ 满足 $a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}_+$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，记 $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$ 为余项和，证明：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{R_{n-1}}$ 发散;

(2) 对于 $\forall p>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{R_{n-1}^{1-p}}$ 收敛.