数学分析（甲）II（H）2023-2024 春夏期末答案

图灵回忆卷　　by jayi0908

2025 年 7 月 24 日

一、 **(10 分)** 定义：设 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域 $\mathrm{U}(P_0)$ 上有定义，对 $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in \mathrm{U}(P_0)$，若 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ 可表示为 $A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，$A, B$ 为仅与 P_0 有关的常数，则称 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微。

证明：$f(x,0)=0$，$f'_x(0,0)=0$，$f(0,y)=0$，$f'_y(0,0)=0$

$\Delta z = f(\Delta x, \Delta y) = \dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \dfrac{(\Delta x)^2 \Delta y}{\rho}.$

$$
\begin{aligned}
\text{故} \quad & \lim_{\rho\to 0} \frac{\mathrm{d}z}{\rho} \\
&= \lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta z - f(0,0) - f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y}{\rho} \\
&= \lim_{\rho\to 0} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{\rho^2} \\
&= \lim_{\rho\to 0} \rho \cos^2\theta \sin\theta = 0
\end{aligned}
$$

从而 $\Delta z = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\rho)$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微。

二、 **(40 分)**

1. 设 $\begin{cases} F(x,y,z) = x^2+y^2+ze^z-2 \\ G(x,y,z) = x^2+xy+y^2-1 \end{cases}$，$P(1,-1,0)$，则

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = -(z+1)e^z \cdot (x+2y)|_P = 1$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} = (z+1)e^z \cdot (2x+y)|_P = 1$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = 2x(x+2y) - 2y(2x+y)|_P = 0$$

故切线为 $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \\ z = 0 \end{cases}$.

2. 设抛物线 $y=x^2$ 将 D 分为上半区域 D_1 和下半区域 D_2，则

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{D_1}(y-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_2}|y-x^2|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}(y-x^2)\,\mathrm{d}y - \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x^2}(y-x^2)\,\mathrm{d}y\\
&= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\left[\frac{y^2}{2}-x^2y\right]_{x^2}^{2} - \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\left[\frac{y^2}{2}-x^2y\right]_{0}^{x^2}\\
&= \int_{-1}^{1}(\frac{4}{2}-2x^2-\frac{x^4}{2}+x^4)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1}(\frac{x^4}{2}-x^4)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-1}^{1}(2-2x^2+x^4)\,\mathrm{d}x\\
&= \left[2x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1}\\
&= 2\times\left(2-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)\\
&= \frac{46}{15}.
\end{aligned}
$$

3. $P(x,y)=-2xe^{-x^2}\sin y-y$，$Q(x,y)=e^{-x^2}\cos y$，$A(1,0)$，$B(-1,0)$，$L':L+\overline{BA}$ 为闭合曲线，围成闭区域 D，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2xe^{-x^2}\cos y$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2xe^{-x^2}\cos y-1$. 由格林公式：

$$
\oint_{L'}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2}
$$

在 AB 上 $P(x,y)=0$，$\mathrm{d}y=0$，故 $\oint_{AB}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$，故 $I_2=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\dfrac{\pi}{2}$.

4. 设 $x=\sin\theta\cos\varphi$，$y=\sin\theta\sin\varphi$，$z=\cos\theta$，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，$0\le\varphi\le2\pi$. 则 $\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)}=\sin^2\theta\cos\varphi$，$\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)}=\sin^2\theta\sin\varphi$，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}=\sin\theta\cos\theta$. 设 $D=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]$，故：

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \iint_D(\sin^4\theta(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)-\sin^3\theta+(\cos^2\theta+1)\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}(\frac{1}{4}\sin^4\theta(\cos3\varphi+3\cos\varphi-\sin3\varphi+3\sin\varphi)+(\cos^2\theta+1)\sin\theta\cos\theta-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{4}\sin^4\theta(\frac{1}{3}(\sin3\varphi+\cos3\varphi)+3(\sin\varphi-\cos\varphi))+((\cos^2\theta+1)\sin\theta\cos\theta-\sin^3\theta)\varphi)|_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\theta\\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}((\cos2\theta+3)\sin2\theta+\sin3\theta-3\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{\pi}{2}(-\frac{1}{8}\cos4\theta-\frac{3}{2}\cos2\theta-\frac{1}{3}\cos3\theta+3\cos\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

5. 用球坐标变换：$x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=1+r\cos\theta$，$0\le r\le1$，$0\le\theta\le$

$\frac{\pi}{2}$，$0 \le \varphi \le \pi$，则

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{r^2+1+2r\cos\theta}}\,\mathrm{d}r \\
&= \pi \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{r^2+2rt+1}}\,\mathrm{d}r \\
&= \pi \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{2r}}\,\mathrm{d}r \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t+(\frac{r^2+1}{2r})}}\,\mathrm{d}t \\
&= \pi \int_0^1 \frac{2r^2}{\sqrt{2r}}\,\mathrm{d}r\, (\sqrt{t+(\frac{r^2+1}{2r})})|_0^1 \\
&= \pi \int_0^1 (r^2+r-r\sqrt{r^2+1})\,\mathrm{d}r \\
&= \pi(\frac{1}{3}r^3+\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{3}(r^2+1)^{\frac{3}{2}})|_0^1 \\
&= \frac{\pi(7-4\sqrt{2})}{6}.
\end{aligned}$$

三、 (10 分) 证明：由题目条件，设 $\forall (x,y) \in D$，$|f'_y(x,y)| \le M$，且对于 $\forall P_0(x_0,y_0)$，$\forall \varepsilon_1 > 0$，$\exists \delta_1 > 0$，使得对 $\forall x \in U(x_0,\delta_1)$，有 $|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| < \varepsilon_1$，

对 $\forall \varepsilon > 0$，取 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$，$\delta = \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2M}\}$，则对 $\forall (x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in U(P_0;\Delta)$，由拉格朗日中值定理，存在 $0 \le \theta \le 1$，使得

$$\begin{aligned}
&|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)| \\
\le\ &|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)| + |f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)| \\
\le\ &|f'_x(x_0+\theta\Delta x)\Delta y| + |f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)| \\
<\ &M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

故由定义，$f(x,y)$ 在 D 上连续.

四、 (10 分)

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(x,y,z) = \frac{\sqrt{2}}{2} f'_x(x,y,z) - \frac{\sqrt{2}}{2} f'_y(x,y,z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4x+2y-2x-4y) = \sqrt{2}(x-y).$$

设 $P(\sin\theta\cos\varphi, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\sin\varphi, \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta)$，则 $\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(P) = \sin\theta(\sqrt{2}\cos\varphi - \sin\varphi) \le \sqrt{3}$，当 $\theta = \frac{\pi}{2}$，$\varphi = \arctan\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$（即 $P(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 0)$）时取等。

五、 (10 分) 由条件，需要对 $f(x)$ 进行偶延拓，故

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1+x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}(\frac{1}{n}(1+x)\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx)|_0^{\pi} \\
&= -\frac{4}{n^2\pi}.
\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-4}{\pi} \cdot (\frac{n}{2n-1})^2 = -\frac{1}{\pi}$.

六、 **(10 分)** 证明：由题目条件与变限积分的性质知 $f_{n+1}(1)=0, f'_{n+1}(x)=-f_n(x)$，更进一步：$f_n^{(k)}(x)=(-1)^k f_{n-k}(x)$，$0\le k\le n-1$.

从而 $f_n(x)$ 为 $n-1$ 阶可导的，且直到第 $n-1$ 阶导数均连续，用泰勒展开：

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{f_n^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k+\frac{f_n^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)}(\xi-1)^{n-1}=\frac{f(\xi)}{(n-1)!}(\xi-1)^{n-1}$$

其中 $\xi\in(0,1)$，由于 f 为 $[0,1]$ 上的连续函数，故存在 $M>0$ 使得 $|f(\xi)|\le M$，故 $|f_n(x)|\le\dfrac{1}{(n-1)!}$，$n\ge 2$

从而由Weierstrass判别法可知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。（因为 $\sum\dfrac{1}{n!}$ 是收敛级数）

七、 **(10 分)**

(1) （这个证法有点丑陋了×）

记 $b_n=\dfrac{a_n}{R_{n-1}}=\dfrac{R_{n-1}-R_n}{R_{n-1}}=1-\dfrac{R_n}{R_{n-1}}\in(0,1)$，分两种情况：

i. 当有无穷多个 $b_n\ge\frac{1}{2}$ 时，取出这些项即得 $\sum b_n$ 发散。

ii. $\exists N>0$，$\forall n>N$，$0<b_n<\frac{1}{2}$ 恒成立，对函数 $x+x^2+\ln(1-x)$ 求导可得该函数在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增，且在 $x=0$ 处取值为 0，因此在 $(0,\frac{1}{2})$ 上有

$$-\ln(1-x)<x+x^2<2x.$$

从而

$$2\sum_{n=N+1}^{\infty}b_n>\sum_{n=N+1}^{\infty}-\ln(1-b_n)=\sum_{n=N+1}^{\infty}\ln\left(\frac{R_{n-1}}{R_n}\right)$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ 可知上式发散。

从而总有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_{n-1}}$ 发散。

(2) 利用积分中值定理，设 $f(x)=x^{p-1}$ 为单减函数，则

$$\frac{R_{n-1}-R_n}{R_{n-1}^{1-p}}<\int_{R_n}^{R_{n-1}}f(x)\,\mathrm{d}x$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_{n-1}^{1-p}}<\lim_{n\to\infty}\int_{R_n}^{R_0}\frac{1}{x^{1-p}}\,\mathrm{d}x$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ 以及瑕积分 $\displaystyle\lim_{t\to0}\int_t^{R_0}x^{p-1}\,\mathrm{d}x$ 收敛，可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_{n-1}^{1-p}}$ 收敛。