数学分析（甲）II（H）2023-2024 春夏期末答案

图灵回忆卷　　by jayi0908

2025 年 6 月 12 日

一、 (10 分) 定义：设 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域 $\mathrm{U}(P_0)$ 上有定义，对 $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in \mathrm{U}(P_0)$，若 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ 可表示为 $A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$A,B$ 为仅与 P_0 有关的常数，则称 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微。

证明：$f(x,0)=0$，$f'_x(x,0)=0$，$f(0,y)=y\arctan\dfrac{1}{|y|}$，$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\arctan\dfrac{1}{|y|}=\dfrac{\pi}{2}$

$\Delta z = f(\Delta x,\Delta y) = \Delta y \arctan\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \Delta y\arctan\dfrac{1}{\rho}.$

$$
\begin{aligned}
\text{故}\quad &\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z - f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y}{\rho}\\
&=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta y(\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2})}{\rho}\\
&=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\sin\theta}{\rho}\cdot\lim_{\rho\to 0}(\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2})=0
\end{aligned}
$$

从而 $\Delta z = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\rho)$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微。

二、 (32 分)

1. 利用球坐标变换，设 $x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$，$0\le r\le 1$，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，$0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$，则 $J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi\\ y_r & y_\theta & y_\varphi\\ z_r & z_\theta & z_\varphi\end{vmatrix} = r^2\sin\theta$

$$
\begin{aligned}
\text{故}\quad \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

2. $f(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t$，$f'(x)=\sqrt{\sin x}$，

$$
\begin{aligned}
\text{故}\quad \int_L x\,\mathrm{d}s &= \int_0^\pi x\cdot\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^\pi x\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}\,\mathrm{d}x\\
&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x\\
&=4(x\sin x - x\cos x+\sin x+\cos x)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.
\end{aligned}
$$

3. $P(x,y)=e^x\sin y-y^2$，$Q(x,y)=e^x\cos y$，设 $A(0,0)$，$B(\pi,0)$，$L':L+\overline{BA}$ 为闭合曲线，围成闭区域 D，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-2y$.
由格林公式

$$\oint_{L'}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=-\iint_D 2y\,\mathrm{d}\sigma=-\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}2y\,\mathrm{d}y=-\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}$$

在 AB 上 $P(x,y)=0$，$\mathrm{d}y=0$，故 $\displaystyle\oint_{AB}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$，故 $\displaystyle\oint_{L}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}$.

4. 设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=r$，$0\le r\le 1$，$0\le\theta\le 2\pi$.
则 $\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \cos\theta & -r\sin\theta\end{vmatrix}=-r\sin\theta$，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & -r\cos\theta\end{vmatrix}=r$，从而为负向。

$$\begin{aligned}\text{故}\quad\iint_S y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=-\int_0^{2\pi}\int_0^1(r^2\sin^2\theta\cdot(-r\sin\theta)+(r+1)r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta-\frac{5}{6}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\sin\theta(1-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta-\frac{5\pi}{3}=-\frac{5\pi}{3}.\end{aligned}$$

三、 **(10 分)** $f(x-z,y-z)=0$，故 $f_x=f_1$，$f_y=f_2$，$f_z=-(f_1+f_2)\neq 0$
由隐函数定理 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f_x}{f_z}=\dfrac{f_1}{f_1+f_2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f_y}{f_z}=\dfrac{f_2}{f_1+f_2}$，故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

四、 **(10 分)** 即求平面上一点 (x,y,z)，使得 $f(x,y,z)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ 取到最小值。

用拉格朗日乘数法，设 $F(x,y,z,\lambda)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}+\lambda(ax+by+cz+d)$，
有 $F_x=\dfrac{x-x_0}{f(x,y,z)}+\lambda a$，$F_y=\dfrac{y-y_0}{f(x,y,z)}+\lambda b$，$F_z=\dfrac{z-z_0}{f(x,y,z)}+\lambda c$，$F_\lambda=ax+by+cz+d$.
令 $F_x=0$，$F_y=0$，$F_z=0$，$F_\lambda=0$，
若 $abc\neq 0$，则有 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}:=t$，即 $x=x_0+at$，$y=y_0+bt$，$z=z_0+ct$;
若 $abc=0$，比如 $a=0$，则 $x=x_0=x_0+at$，对于 b,c 同理，即仍可写成 $x=x_0+at$，$y=y_0+bt$，$z=z_0+ct$.

故 $x=x_0+at$，$y=y_0+bt$，$z=z_0+ct$.
代入 $F_\lambda=0$ 得 $a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct)+d=0$，即 $t=-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$。
故 $f(x,y,z)=\sqrt{(at)^2+(bt)^2+(ct)^2}=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 为所求距离。

五、 **(10 分)** Dirichlet 判别法:

(1) $\{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致有界;

(2) $\forall x\in I$，$\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 单调;

(3) $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致收敛于 0.

满足这三点则有 $\sum a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

证明：$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}(\sin{(n+\frac{1}{2})x}-\sin\frac{x}{2}) \le \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}-1$. 故 $\sum\cos kx$ 在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致有界。

$\{\frac{n}{n^2+1}\} = \{\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\}$ 单调趋于 0，且对于以 x 为变元的函数列来说相当于常函数列，故一致收敛于 0.

故由 Dirichlet 判别法，$\sum_{k=1}^{n}\frac{n\cos kx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛。

六、 (10 分) $T=2l=2\Rightarrow l=1$，故

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x^2\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\\&=(\frac{1}{n\pi}x^2\sin n\pi x+\frac{2}{n^2\pi^2}x\cos n\pi x-\frac{2}{n^3\pi^3}\sin n\pi x)|_0^1\\&=\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x^2\sin n\pi x\,\mathrm{d}x\\&=(\frac{-1}{n\pi}x^2\cos n\pi x+\frac{2}{n^2\pi^2}x\sin n\pi x+\frac{2}{n^3\pi^3}\cos n\pi x)|_0^1\\&=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\frac{2}{n^3\pi^3}((-1)^n-1).\end{aligned}$$

故 $f(x)=\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n\cos n\pi x+(\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\frac{2}{n^3\pi^3}((-1)^n-1))\sin n\pi x)$，

在 $x=\pm1$ 时收敛于 $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$.

七、 (10 分) Cauchy 收敛准则：对于常数项级数 $\sum x_k$，其收敛的充要条件为：对 $\forall\varepsilon>0$，存在 N，使得对 $\forall n>N$，$\forall p\in\mathbb{N}_+$，有 $|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}|<\varepsilon$。

证明：由条件，$\forall\varepsilon_1>0,\exists N_1,\forall n>N_1,\forall p\in\mathbb{N}_+$，有 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon_1$；

$\forall\varepsilon_2>0,\exists N_2,\forall n>N_2,\forall p\in\mathbb{N}_+$，有 $|b_{n+p+1}-b_{n+p}|+|b_{n+p}-b_{n+p-1}|+\cdots+|b_{n+2}-b_{n+1}|<\varepsilon_2$。

则不难知存在 $M>0$ 与 N_3，使得对 $\forall n>N_3$，有 $|b_n|<M$。

对 $\forall\varepsilon>0$，取 ε_1、ε_2 使得 $\varepsilon_1(M+\varepsilon_2)=\varepsilon$，取 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$，则对 $\forall n>N$，

$\forall p \in \mathbb{N}_+$，有：

$$\begin{aligned}
&|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}| \\
\le& |b_{n+1}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})|+|(a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{n+p})(b_{n+2}-b_{n+1})| \\
&\quad +|(a_{n+3}+\cdots+a_{n+p})(b_{n+3}-b_{n+2})|+\cdots+|a_{n+p}(b_{n+p}-b_{n+p-1})| \\
<& \varepsilon_1(|b_{n+1}|+|b_{n+2}-b_{n+1}|+\cdots+|b_{n+p}-b_{n+p-1}|) \\
<& \varepsilon_1(M+\varepsilon_2)=\varepsilon.
\end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛准则，$\sum a_nb_n$ 收敛。

注，本题也有利用 Abel 变换的做法：

令 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，$A_0=0$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_nb_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k=A_nb_n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})$.

由于 $\sum a_n$ 收敛，故 $\{A_n\}$ 为收敛数列；

由于 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛，故其部分和 $\{b_n\}$ 也是收敛数列，故 $\{A_nb_n\}$ 也是收敛数列。

故即证 $\sum A_n(b_n-b_{n+1})$ 收敛。

由 Cauchy 收敛准则，对 $\forall\varepsilon_1>0,\exists N_1\in\mathbb{N}_+,\forall n>N_1,\forall p\in\mathbb{N}_+$，有 $\sum\limits_{i=1}^{p}|b_{n+i+1}-b_{n+i}|<\varepsilon_1$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，则 $\exists N_2\in\mathbb{N}_+,\forall n>N_2,|A_n|<\dfrac{3}{2}|A|$，

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\varepsilon_1=\dfrac{2\varepsilon}{3|A|}$，$N=\max N_1,N_2$，则对 $\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}_+$，有

$$\begin{aligned}
|\sum_{i=1}^{p}A_{n+i}(b_{n+i}-b_{n+1+i})| &\le \sum_{i=1}^{p}|A_{n+i}||b_{n+1+i}-b_{n+i}| \\
&< \frac{3|A|}{2}\sum_{i=1}^{p}|b_{n+1+i}-b_{n+i}| \\
&< \frac{3|A|}{2}\cdot\varepsilon_1<\varepsilon
\end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛准则，$\sum A_n(b_n-b_{n+1})$ 收敛，得证。

八、(8 分)

$$\frac{\mathrm{d}g_\theta}{\mathrm{d}t}=f_1\cos\theta+f_2\sin\theta=0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2g_\theta}{\mathrm{d}t^2}&=f_{11}\cos^2\theta+2f_{12}\cos\theta\sin\theta+f_{22}\sin^2\theta \\
&=\frac{f_{11}+f_{22}}{2}+\frac{f_{11}-f_{22}}{2}\cos2\theta+f_{12}\sin2\theta>0.
\end{aligned}$$

上式对 $\forall\theta\in[0,2\pi)$ 成立，故 $f_1=f_2=0$，且由辅助角公式，$\dfrac{f_{11}+f_{22}}{2}>\sqrt{(\dfrac{f_{11}-f_{22}}{2})^2+f_{12}^2}$

即 $f_{11}\cdot f_{22}-f_{12}^2=\begin{vmatrix}f_{11}&f_{12}\\f_{21}&f_{22}\end{vmatrix}>0$，且代入 $\theta=0$ 到 $\dfrac{\mathrm{d}^2g_\theta}{\mathrm{d}t^2}$ 中，得 $f_{11}>0$，

利用 Hesse 矩阵的正定性，得 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处有极小值。