

# 数学分析（甲）II（H）2022-2023 春夏期末

## 图灵回忆卷

2023 年 6 月 23 日

一、(10 分) 叙述函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $D$  上一致收敛的定义, 并据定义证明函数列  $\left\{f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^4}}\right\}$  在  $\mathbb{R}$  上一致收敛.

二、(40 分) 计算:

1. 设  $z = f(x^2 e^{-y}, xy)$ , 函数  $f$  在  $\mathbb{R}^2$  有二阶连续偏导数, 请计算  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ;

2. 空间曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$  在点  $(1, 1, -1)$  处的切线与法平面;

3. 第一类曲线积分  $I = \int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ds$ , 其中  $\gamma$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = e^t \end{cases}, t \in [0, \pi]$ ;

4. 第二类曲线积分  $I = \int_C (e^x - y^3) dx + (\cos(y^2) + x^3) dy$ , 其中  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$  为单位圆的上半圆, 方向为逆时针从  $(1, 0)$  到  $(-1, 0)$ ;

5. 三重积分  $I = \iiint_{\Omega} \sqrt[4]{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , 其中  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  为单位球.

三、(10 分) 请证明函数  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$  在  $(0, 0)$  处沿任意方向的方向导数都存在, 但在  $(0, 0)$  处不可微.

四、(10 分) 请计算幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) x^n$  的收敛域与和函数.

五、(10 分) 请证明在  $(0, 0)$  的某邻域内存在唯一的可导函数  $y = \varphi(x)$  满足  $\sin y + \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$ , 并求其导函数  $\varphi'(x)$ .

六、(10 分) 证明:  $\forall x \in (0, \pi), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$ .

七、(10 分) 已知  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 \ln n}$ . 证明:

1.  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续;

2.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}$  在  $(0, \pi)$  上非一致收敛;

3.  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  上可导, 且  $f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}$ .