

数学分析 (甲) II (H) 2022-2023 春夏期末

图灵回忆卷

2023 年 6 月 23 日

一、(10 分) 叙述函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛的定义, 并据定义证明函数列 $\left\{f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^4}}\right\}$ 在 \mathbb{R} 上一致收敛.

二、(40 分) 计算:

1. 设 $z = f(x^2 e^{-y}, xy)$, 函数 f 在 \mathbb{R}^2 有二阶连续偏导数, 请计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

2. 空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, -1)$ 处的切线与法平面;

3. 第一类曲线积分 $I = \int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ds$, 其中 γ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = e^t \end{cases}, t \in [0, \pi]$;

4. 第二类曲线积分 $I = \int_C (e^x - y^3) dx + (\cos(y^2) + x^3) dy$, 其中 $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ 为单位圆的上半圆, 方向为逆时针从 $(1, 0)$ 到 $(-1, 0)$;

5. 三重积分 $I = \iiint_{\Omega} \sqrt[4]{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 为单位球.

三、(10 分) 请证明函数 $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ 在 $(0, 0)$ 处沿任意方向的方向导数都存在, 但在 $(0, 0)$ 处不可微.

四、(10 分) 请计算幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) x^n$ 的收敛域与和函数.

五、(10 分) 请证明在 $(0, 0)$ 的某邻域内存在唯一的可导函数 $y = \varphi(x)$ 满足 $\sin y + \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$, 并求其导函数 $\varphi'(x)$.

六、(10 分) 证明: $\forall x \in (0, \pi), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$.

七、(10 分) 已知 $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 \ln n}$. 证明:

1. $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续;

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}$ 在 $(0, \pi)$ 上非一致收敛;

3. $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上可导, 且 $f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}$.