数学分析（甲）II（H）2020 春夏期末　重制版答案

V1CeVersa

2024 年 2 月 29 日

一、函数项级数、含参变量积分、广义积分

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛，其和函数为 $S(x)$，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在仅与 ε 相关的正整数 $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$，使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时，有

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon.$$

2. 若 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 I 上一致收敛，则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在仅与 ε 相关的正实数 $A_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+$，使得当 $A > A_0(\varepsilon)$ 时，有

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x,y) \right| < \varepsilon.$$

二、正项级数、方向导数

1. 对 $x \geqslant 0$，我们证明不等式 $\sin x \geqslant x - \dfrac{1}{6}x^3$.

设 $f(x) = \sin x - x + \dfrac{1}{6}x^3$，$x \geqslant 0$，$f'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{1}{2}x^2$，$f''(x) = -\sin x + x \geqslant 0$.

则 $f'(x) \geqslant f'(0) = 0$，$f(x) \geqslant f(0) = 0$，不等式得证. 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n\sin(1/n)}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3})} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(2 - \frac{1}{3n^2})} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{n^{5/3}}}$$

根据比较判别法，此正项级数收敛.

2. 设 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z} \right) = \left(\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{r}, \dfrac{z}{r} \right)$.

曲线在 P_0 点的方向向量为 $\vec{l} = (x'(t), y'(t), z'(t))\Big|_{(1,2,3)} = (1,4,12)$，其单位向量为 $\vec{l}_0 = \dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \dfrac{(1,4,12)}{\sqrt{161}}$. 那么

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \vec{l}_0 \cdot \nabla u = \frac{45}{7\sqrt{46}}.$$

三、重积分、曲线积分和曲面积分的计算

1.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi z^2\,\mathrm{d}z + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \pi(1-z^2)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{(2-\sqrt{2})}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

2. 进行一个元的换：$x = y = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, z = \cos\theta, \theta \in [0, 2\pi]$.

因而

$$
\mathrm{d}s = \sqrt{2\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\right)^2 + (-\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta\,.
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2\alpha - \cos\alpha)^2\,\mathrm{d}\alpha \quad (\theta = \pi + \alpha) \\
&= 2\int_0^{\pi} (\sin^2\alpha - \cos\alpha)^2\,\mathrm{d}\alpha \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\beta + \sin\beta)^2\,\mathrm{d}\beta \quad \left(\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta\right) \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\beta + \sin^2\beta + 2\cos^2\beta\sin\beta)\,\mathrm{d}\beta \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4\beta - 2\sin^3\beta - \sin^2\beta + 2\sin\beta + 1)\,\mathrm{d}\beta \\
&= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4\beta - \sin^2\beta + 1)\,\mathrm{d}\beta = \frac{7}{4}\pi.
\end{aligned}
$$

3. 进行一个孔的挖：设 $P = \dfrac{-y}{3x^2+4y^2}, Q = \dfrac{x}{3x^2+4y^2}$，由于在任意非原点处，有

$$
\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4y^2-3x^2}{(3x^2+4y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.
$$

我们在原点附近取一个非常小的椭圆曲线 $L'\colon 3x^2+4y^2=\delta^2$，$\delta$ 充分小，使得 L' 完全包含在 L 内部，设 L' 与 L 之间的区域为 S，L' 包含的椭圆为 S'. 则由格林公式，有

$$
\begin{aligned}
\int\limits_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{3x^2+4y^2} &= \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int\limits_{L'} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{3x^2+4y^2} \\
&= \frac{1}{\delta^2}\int\limits_{L'} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\delta^2}\iint\limits_{S'} (1+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\delta^2}\pi\frac{\delta}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

4. 考虑椭球面的参数表示：$x=\sin\varphi\cos\theta, y=2\sin\varphi\sin\theta, z=3\cos\varphi$，其中 $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}],\theta\in[0,2\pi]$. 计算可知

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=2\sin\varphi\cos\varphi=\sin 2\varphi\geqslant 0, \frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}=6\sin^2\varphi\cos\theta.$$

由左式可知，参数 (φ,θ) 决定的法向量是外侧的，由第二类曲面积分的定义：

$$\begin{aligned}\iint\limits_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int\limits_{D_{\varphi\theta}} \sin^3\varphi\cos^3\theta\cdot 6\sin^2\varphi\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{12}{5}\pi.\end{aligned}$$

四、一元函数微分学

1. 由于

$$\begin{cases}x-y=1-z\\ x+y=1-2z\end{cases}\implies\begin{cases}x=1-\dfrac{3}{2}z\\ y=-\dfrac{1}{2}z\end{cases}$$

所以

$$g(z)=f(x(z),y(z),z)=\frac{3}{2}\left(|z|+\left|z-\frac{2}{3}\right|\right)\geqslant\frac{3}{2}\left|z-\left(z-\frac{2}{3}\right)\right|=1.$$

当且仅当 $z\in\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$ 时取等，所有极小值点为 $\left(1-\dfrac{3}{2}z,-\dfrac{z}{2},z\right),z\in\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$.

2. 令 $z=0$，有 $y=z=0$，仅有 x 为非零项，则题目所求的极小值点为 $(1,0,0)$.

五、重积分

给出两种方法：

法一. 因为 $f(x,1)=f(1,y)=0$，所以

$$f_x(x,1)=f_y(1,y)=0.$$

并且由于被积函数 $xyf_{xy}(x,y)$ 在区域 D 上连续，所以我们可以交换积分次序.

$$\begin{aligned}\iint\limits_D xyf_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1 yf_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1 y\,\mathrm{d}f_x\left(x,y\right) \\ &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x\left(yf_x(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f_x(x,y)\,\mathrm{d}y\right) \\ &= -\iint\limits_D xf_x(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xf_x(x,y)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1\mathrm{d}y\left(xf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

法二. 设 L 为区域 $D=[0,1]\times[0,1]$ 的边界曲线，直接计算曲线积分并利用 Green 公式得：

$$0=\int\limits_L xyf_y(x,y)\,\mathrm{d}y-xyf_x(x,y)\,\mathrm{d}x=\iint\limits_D\big(yf_y(x,y)+xf_x(x,y)+2xyf_{xy}(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

所以

$$\iint\limits_D xyf_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D y\big(f_y(x,y)+xf_x(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

并且

$$0=\int_L xf(x,y)\,\mathrm{d}y-yf(x,y)\,\mathrm{d}x=\iint\limits_D\big(xf_x(x,y)+yf_y(x,y)+2f(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

所以

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D\big(yf_y(x,y)+xf_x(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D xyf_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

六、Fourier 级数

1. 设 $u_0(x)=\dfrac{a_0}{2}$，$u_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx\ \ (n=1,2,\ldots)$. 又由于

$$|u_n(x)|=|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\leqslant|a_n|+|b_n|\leqslant\frac{M}{n^3},\ \ n\geqslant 1.$$

所以

$$\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|\leqslant\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^3}$$

通过比较判别法显然可以得出该三角级数绝对收敛，故而收敛. 并且，由 Weierstrass 判别法，其也是一致收敛的.

2. 由上，该三角级数一致收敛于其和函数 $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，因而其可以逐项积分. 由三角函数族的正交性，重复 Fourier 系数的构造过程：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=a_0+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x\,;$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,\mathrm{d}x=a_n;$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,\mathrm{d}x=b_n.$$

即可得知其为 Fourier 级数.

3. 我们首先说明此三角级数可以逐项求导：由于本三角级数一致收敛，显然其点态收敛于其和函数；并且三角级数的每一项都连续可导；所以我们只用证明其逐项求导的级数一致收敛：由

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right|&=\sum_{n=1}^{\infty}|n(-a_n\sin nx+b_n\cos nx)|\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n(|a_n|+|b_n|)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}.\end{aligned}$$

并根据 Weierstrass 判别法，其逐项求导的级数一致收敛. 这样此三角级数逐项可导，并且其导数为导数的级数，并且连续.

七、隐函数定理

本题题干有误，应为：$F(x,y)$ 在带状区域 $x\in[a,b]$ 存在连续一阶偏导，$F_x(x,y)$ 有正值下界，证明：在 (x_0,y_0) 附近可以由 $F(x_0,y_0)=0$ 唯一确定一个隐函数 $y=f(x)$.

八、函数项级数

1. 设

$$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x^{\frac{1}{n}}\right)-\frac{\pi}{n}(1-x), x\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$

由 $\sin x\geqslant\dfrac{2}{\pi}x$，对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x)=\frac{\pi}{2n}\left(2-x^{\frac{1}{n}-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^{\frac{1}{n}}\right)\right)\geqslant\frac{\pi}{2n}\left(2-x^{\frac{1}{n}-1}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}x^{\frac{1}{n}}\right)\geqslant\frac{\pi}{2n}(2-(1/2)^{-1})=0.$$

所以 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，且 $f(1)=0$，所以 $f(x)\leqslant 0$，即

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x^{\frac{1}{n}}\right)\leqslant\frac{\pi}{n}(1-x), x\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$

2. 由

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x^{\frac{1}{n}}\right)\frac{x^n}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}, x\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$

且数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以由 Weierstrass 判别法，原级数在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上一致收敛.