2021-2022学年秋冬学期数学分析（H）期末考试解析

图灵2022学长组 潘昶皓 提供

对解析或题目本身有疑问可以私信提出，因为是个人写的解析，不确保正确性（伪证并不是不可能，只是我发现不了[手动狗头]）

1.叙述柯西准则并证明：$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin k}{k(k+1)}$收敛

解析：叙述略。对$\forall\epsilon>0$,$\exists N=\left[\dfrac{1}{\epsilon}\right]>0$,当$n>m>N$时，

$$|a_n-a_m|=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin k}{k(k+1)}\le\sum_{k=m+1}^{n}\left|\frac{1}{k(k+1)}\right|=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{m+1}<\epsilon$$

所以由Cauchy 收敛原理可知,$\{a_n\}$收敛。

2.(1)计算极限 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_a^x(1+u^4)^{\frac14}\mathrm{d}u}{x^3}$

(2)计算不定积分 $I=\int\dfrac{3x^2-4x-1}{x^3-2x^2-x+2}\mathrm{d}x$

(3)设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},x\neq0,f(0)=1$，求 $f'(0),f''(0)$

(4)设曲线 $C:y=e^x$ 从 $(0,0)$ 引切线 l，求直线 l，曲线 C 和 y 轴围成的区域绕 x 轴旋转得到的几何体的体积

解析：

（1）由 L'Hospital 法则可知，$I=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x^4)^{\frac14}}{3x^2}$, $\left|\dfrac{(1+x^4)}{3x^2}\right|<\dfrac{(2x^4)^{\frac14}}{3x^2}\to0,x\to+\infty$,

因此由夹逼原理可知，$I=0$

（2）注意到$(x^3-2x^2-x+2)'=3x^2-4x-1$,则$I=ln(x^3-2x^2-x+2)+C$

ps:这个注意到还是相当关键的，不然可能要用待定系数法了，会比较折磨人

（3）由 Taylor 公式可知，$xf(x)=\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+\ldots$,因此 $f(x)=1-\dfrac{x^2}{6}+\ldots$

由 Taylor 幂级数展开的唯一性可知，$f'(0)=0,f''(0)=-\dfrac13$

(ps:这种做法有点投机了，想求稳的话还是乖乖用定义吧)

（4）容易求得$l:y=\mathrm{e}x$ 与曲线C 相交于点$(1,\mathrm{e})$, 因此$V=\pi\int\limits_0^1(\mathrm{e}^x)^2-(\mathrm{e}x)^2\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{6}(\mathrm{e}^2-3)$

3.证明：没有上界的数列一定存在发散到正无穷的子列

证明：对于$\forall\{a_n\}$ 满足条件，显然对$\forall n\in\mathbf{N},\exists m\in\mathbf{N},m>n,\mathrm{s.t.}a_m>a_n$,

否则，对任意的 $m\geq n+1,a_n\geq a_m$,但$\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ 为有限数列,

故对$\forall k\in\mathbf{N},a_k\le max(a_1,a_2,...,a_n)$,这与$\{a_n\}$ 无上界矛盾！因此$\forall n\in\mathbf{N},\{a_n,a_{n+1},...\}$无上界，则$\exists m>n,\text{s.t.}a_m>a_{n+1}$, 反复取$n=n_k,m=n_{k+1}$,并对k 进行归纳构造，则$\{a_{n_k}\}$ 为一个发散到正无穷的子列。

4.已知$f(x)$ 在区间 $D=[0,1]$ 上有界，证明：$\sup\limits_{x\in D}f(x)-\inf\limits_{x\in D}f(x)=\sup\limits_{x',x''\in D}|f(x')-f(x'')|$

证明：设$a=\sup\limits_{x\in D}f(x),b=\inf\limits_{x\in D}f(x)$, 若 $a=b$, 则$f(x)$ 为常值函数，等式左右均为0，成立。

以下假设 $a>b$, 对$\forall\epsilon\in(0,\dfrac{a-b}{2}),\forall x',x''\in D$, 因为 a,b 为 $f(x)$ 在D 上的上下界，故我们有 $|f(x')-f(x'')|\le a-b$

又由于确界的性质，$\exists x_1,x_2\in D$，$\text{s.t.}f(x_1)>a-\dfrac{\epsilon}{2},f(x_2)<b+\dfrac{\epsilon}{2}$

因此，我们有$a-b\ge|f(x_1)-f(x_2)|\ge a-b-\epsilon$ ， 由夹逼原理可知，$|f(x_1)-f(x_2)|=a-b$ ， 即 $\sup\limits_{x\in D}f(x)-\inf\limits_{x\in D}f(x)=\sup\limits_{x',x''\in D}|f(x')-f(x'')|$

5.已知$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在，证明：$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在

证明：$\because f(x)\in\mathrm{D}(0,1),\therefore f(x)\in\mathrm{C}(0,1)$

又 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在，不妨设 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=a$, 则 $\forall1>\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in(0,\delta),|f'(x)-a|<\epsilon$

因此，由Langrange中值定理可知，对 $\forall x_1<x_2\in(0,\delta),\exists\alpha\in(x_1,x_2)\subseteq(0,\delta),|f(x_2)-f(x_1)|=|x_2-x_1|\cdot|f'(\alpha)|<\delta\cdot|f'(\alpha)|\le\delta k$, (其中$k=|a|+1>|a|+|\epsilon|$)

取$\delta\to0^+$, 可知$|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$ 恒成立，由x_1,x_2 的任意性，结合柯西收敛定理可知，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在

6.若$f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 上一致连续，$g(x)$ 在 $[0,\ +\infty)$上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)-g(x)|=0$，证明：$g(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上一致连续。

证明：由条件可知，对 $\forall\epsilon>0$ ，由于$f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 上一致连续，可知 $\exists\delta>0,\forall x,x'\in(0,+\infty),|x-x'|<\delta,|f(x)-f(x')|<\epsilon$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)-g(x)|=0$，可知$\exists M\in\mathbf{R},\forall x>M,|f(x)-g(x)|<\epsilon$

综上可知，对 $\forall x,x',x''>M,|x-x''|<\delta,|x'-x''|<\delta$，由 x 的任意性可知：

$|g(x')-g(x'')|=|g(x')-f(x')+f(x')-f(x)+f(x)-f(x'')+f(x'')-g(x'')|$

$<|g(x')-f(x')|+|f(x')-f(x)|+|f(x)-f(x'')|+|f(x'')-g(x'')|<4\epsilon$

因此$g(x)$ 在$[M,+\infty)$ 上一致连续。

又由Cantor闭区间定理可知，$g(x)$ 在$[0,M+1]$ 上一致连续,因此，$g(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上一致连续。

7.设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},x\ne0,f(0)=1$, 证明：$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$，且两者均收敛。

证明：注意到：$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1=f(0)$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续。

又因为 $\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$ 有界且 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减趋向于 0

故由 Dirichlet 判别法可知，$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

利用分部积分，可知 $\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{\sin^2x}{x}|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}-\dfrac{\mathrm{d}(\sin^2x)}{x}$,其中

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sin^2x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin^2x}{x}=0,$

而 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}(\sin^2x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\dfrac{2\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t(t=2x)$

因此 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$，且两者均收敛。

8.设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上三阶可导，且 $f(0)=f'(0)=f''(0)=0,f'''(0)>0,$ 且对 $\forall x\in(0,1],0<f(x)<1.$ 任取 $x_1\in(0,1),x_{n+1}=x_n(1-f(x_n))$，证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

（2）$\exists c\in\mathbf{R},c\neq0,\exists\alpha\in\mathbf{R},\text{s.t.}\lim\limits_{n\to\infty}cn^\alpha x_n=1$

证明：

（1）$\because 0<f(x)<1,\therefore 0<x_{n+1}<x_n<\cdots<x_1\in(0,1)$,由单调有界定理，设:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$

左右取极限可知：$\beta=\beta(1-f(\beta))\Rightarrow\beta f(\beta)=0$

若 $\beta\neq0,f(\beta)=0$，但是$\forall x\in(0,1),0<f(x)<1.$ 矛盾！因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

（2）原命题等价于：$\dfrac{1}{x_n}\sim O(n^\alpha)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{x_n^{\frac{-1}{\alpha}}}=c\neq0$

由条件可知 $\{\dfrac{1}{x_n}\}$ 大于 0 为单调递增数列，且趋向于无穷大，因此由Stolz定理可知，若

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n^{\frac{-1}{\alpha}}-x_n^{\frac{-1}{\alpha}}}$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n^{\frac{-1}{\alpha}}-x_n^{\frac{-1}{\alpha}}}=\dfrac{1}{x_n}\sim O(n^\alpha)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{x_n^{\frac{-1}{\alpha}}}$（此处借用Stolz思考）

根据Taylor展开可知，$f(x)\sim ax^3,$

记$x_n=f(n)$则有$x_{n+1}=x_n(1-ax_n^3)\Rightarrow f(n+1)-f(n)=-af(n)^4,$

由Lagrange 中值定理，可知在$n\to+\infty$ 时，$f(n+1)-f(n)\sim f'(n)$，

因此有 $f'(n)\sim-f^4(n)$，得到 $f(n)=x_n\sim n^{-\frac{1}{3}},\Rightarrow\alpha=\dfrac{1}{3}$

（以上过程为分析α 的取值，可以不用写在试卷上）

下证上述猜想成立：

由条件可知：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-f(x_n))=1$，因此：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^3}-\frac{1}{x_n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^3(x_n)-3f^2(x_n)+3f(x_n)}{x_{n+1}^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{f^3(x_n)-3f^2(x_n)+3f(x_n)}{x_n^3}$$

又$\because f(x)\sim ax^3,(a=\dfrac{f'''(0)}{6}>0,x\to0+)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f^3(x_n)-3f^2(x_n)+3f(x_n)}{x_n^3}=3a$$

由Stolz 定理可知，$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^3=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{x_n^{\frac{-1}{\alpha}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{x_{n+1}^3}-\dfrac{1}{x_n^3}}=\dfrac{1}{3a}$ 存在且不为0，因此取

$\alpha=1/3$，命题成立。