# 数分 1(H)2020 秋冬期末 (部分)

自陈锦辉老师 2021-3-2 课件

2021 年 8 月 24 日

1.(10 分) 试叙述确界原理，并用$\epsilon-\delta$语言和确界原理证明：设函数$f$在 (0,1) 上单调有界，则极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$存在

2.求：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

(2) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+x\ln^2 x\right)\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_0^x x^p F(xt)\mathrm{d}x$,其中 0<p<1,$F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x^p}, x>0\\ 1, x=0\end{cases}$ 连续

(5)设$f(x)=\int_0^x \sqrt{\cos t}\mathrm{d}t$,试求曲线$y=f(x), x\in[0,1]$的弧长$L$

3.(10 分) 设数列 $\{b_n\}$ 有界,$\forall n\in\mathbb{Z}^+$,令$a_n=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{i(i+1)}$,试用$Cauchy$收敛准则证明 $\{a_n\}$ 收敛

5.(10 分) 设$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=+\infty$, 请证明：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=-\infty$之一成立

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty$

6.(10 分) 设函数$f(x)$满足方程$\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)+[f'(x)]^2=x$, 且$f'(0)=0$，请证明：$x=0$不是$f(x)$的极值点.