

一、(20 分) 给出下列命题的真伪, 若命题为真, 给出简要证明; 若命题为假, 请举出反例。

1. T 是 3 维实线性空间上的算子, 且只有特征值 1, 则 $(T - I)^2 = O$ 。
2. 设 T 是实内积空间上的算子, W 是 T 的一个不变子空间, 则 W 的正交补 $W^\perp$ 还是 T 的不变子空间。
3. 实内积空间上的算子 T , 在某组基下的矩阵是正交阵, 则 T 是正交算子。
4. 有限维实内积空间上的算子 T 的奇异值均为 1, 则 T 是等距变换。

二、(10 分) 求下列直线在 Oxz 平面上的投影:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 4x + 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

三、(10 分)

1. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是几个不同的数, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是线性空间 V 的一组基, 已知:

$$\begin{cases} \alpha_1 = e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_1^{n-1} e_n, \\ \alpha_2 = e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_2^{n-1} e_n, \\ \vdots \\ \alpha_n = e_1 + a_n e_2 + \dots + a_n^{n-1} e_n. \end{cases}$$

求证: $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 也是 V 的一组基。

2. 设 $V_1, V_2, \dots, V_m$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 的 m 个真子空间。证明: V 中必有一组基, 使得每个基向量都不在诸 V_i 的并中。

四、(10 分)

1. 设 $V = M_n(F)$, V_1 是由 V 中全体对角矩阵张成的子空间, 给出商空间 V/V_1 的一个基。
2. 设 $V = M_3(F)$, 已知矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求商空间 $V/C(A)$ 的一个基, 其中 $C(A) = \{X \in M_3(\mathbb{F}) \mid XA = AX\}$ 。

五、(10 分) 设 V 是有限维的, $T \in \mathcal{L}(V)$, 且 p 是 T 的最小多项式。设 $\lambda \in F$, 证明: $T - \lambda I$ 的最小多项式是定义为 $q(x) = p(x + \lambda)$ 的多项式 q 。

六、(10 分) 设 $V = P_3(\mathbb{R})$, 定义算子 $\varphi: V \rightarrow V, f(x) \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 。

1. 证明: $V = \ker \varphi \oplus \ker(I - \varphi)$;
2. 若有一算子 $E \in \mathcal{L}(V)$, 满足 $E|_{\ker \varphi} = -I$ 且 $E|_{\ker(I-\varphi)} = I$, 请用算子 φ 和 I 写出 E 的代数表达式。

七、(10 分) 设 $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$, 定义映射 $f: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $f(A, B) = \text{Tr}(AB)$ 。

1. 证明: f 是 W 上的内积;
2. 设 $S = \{A \in W \mid \text{Tr}(A) = 0\}$, 试求 S 的维数以及 S 在 W 中的正交补 $S^\perp$ 。

八、(10 分) 设 V 是有限维内积空间。已知 $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$ 是两个正规算子。假设 T_1 与 T_2 乘法可交换 (即 $T_1 T_2 = T_2 T_1$)。请完成下列证明:

1. 证明: T_1 和 T_2 可被同时正交对角化 (即证明存在 V 的一组规范正交基, 使得该基中的每个向量既是 T_1 的特征向量, 也是 T_2 的特征向量)。
2. 证明: 算子乘积 $T_1 T_2$ 也是一个正规算子。

九、(10 分) 设 V 是一个 n 维复内积空间, $N \in \mathcal{L}(V)$ 是一个幂零算子, 且满足 $N^{n-1} \neq 0$ (即 N 的幂零指数恰好为 n)。已知线性算子 $T \in \mathcal{L}(V)$ 与 N 乘法可交换 (即 $TN = NT$)。请完成下列证明:

1. 证明: 必然存在一个非零向量 $v \in V$, 使得向量组 $\beta = \{v, Nv, N^2v, \dots, N^{n-1}v\}$ 线性无关, 从而构成 V 的一组基。
2. 证明: 算子 T 必然可以表示为 N 的多项式, 即: 存在一组复数 $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$, 使得

$$T = c_0 I + c_1 N + \dots + c_{n-1} N^{n-1}$$