

一、判断题 (20 分)

1. T 是 3 维实线性空间上的算子, 且只有特征值 1, 则 $(T - I)^2 = O$ 。

• 判断: 假。

• 反例: 考虑 3×3 的 Jordan 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 它对应的线性算子只有特征值

1。计算

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

2. 设 T 是实内积空间上的算子, W 是 T 的一个不变子空间, 则 $W^\perp$ 还是 T 的不变子空间。

• 判断: 假。

• 反例: 在 $\mathbb{R}^2$ 及其标准内积下, 令 T 对应的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。设 $W = \text{span}\{(1, 0)^T\}$, 显然 W 是 T 的不变子空间。其正交补 $W^\perp = \text{span}\{(0, 1)^T\}$ 。由于 $T(0, 1)^T = (1, 1)^T \notin W^\perp$, 因此 $W^\perp$ 不是 T 的不变子空间。

• 解析: 实际上, 若命题成立, 则算子对不变子空间 $W^\perp$ 也不变。于是为了找到反例, 可以尝试构造非对称的算子 (矩阵)。

7.28 自伴算子与不变子空间

设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是自伴的, 并设 U 是 V 的在 T 下不变子空间. 则

(a) $U^\perp$ 在 T 下不变;

(b) $T|_U \in \mathcal{L}(U)$ 是自伴的;

(c) $T|_{U^\perp} \in \mathcal{L}(U^\perp)$ 是自伴的.

3. 实内积空间上的算子 T , 在某组基下的矩阵是正交阵, 则 T 是正交算子。

• 判断: 假。

• 反例: 该命题只有当基为规范正交基时才成立。考虑 $\mathbb{R}^2$ 与标准内积, 取非正交基 $e_1 = (1, 0)^T, e_2 = (1, 1)^T$ 。设 T 在此基下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (这是一个正交矩阵)。则有 $Te_1 = e_2$ 。计算长度发现 $\|e_1\| = 1$, 而 $\|Te_1\| = \|e_2\| = \sqrt{2} \neq 1$ 。因为不保范数, 所以 T 不是正交算子。

7.42 等距同构的刻画

设 $S \in \mathcal{L}(V)$. 则以下条件等价:

- (a) S 是等距同构;
- (b) 对所有 $u, v \in V$ 均有 $\langle Su, Sv \rangle = \langle u, v \rangle$;
- (c) 对 V 中的任意规范正交向量组 $e_1, \dots, e_n$ 均有 $Se_1, \dots, Se_n$ 是规范正交的;
- (d) V 有规范正交基 $e_1, \dots, e_n$ 使得 $Se_1, \dots, Se_n$ 是规范正交的;
- (e) $S^*S = I$;
- (f) $SS^* = I$;
- (g) S^* 是等距同构;
- (h) S 是可逆的且 $S^{-1} = S^*$.

4. 有限维实内积空间上的算子 T 的奇异值均为 1, 则 T 是等距变换。

- 判断: 真。
- 证明: T^*T 的特征值都是 1。由于 T^*T 是自伴随算子 (实对称), 它可以被正交对角化。由于特征值全为 1, 故 $T^*T = I$ 。故 T 是等距变换。

7.49 定义奇异值 (singular values)

设 $T \in \mathcal{L}(V)$. 则 T 的奇异值就是 $\sqrt{T^*T}$ 的本征值, 而且每个本征值 λ 都要重复 $\dim E(\lambda, \sqrt{T^*T})$ 次。

二、解析几何 (15 分)

- 题目: 求直线 $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 4x + 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$ 在 Oxz 平面上的投影。

- 解答:

(法一), 令 $x = t$, 则

$$y = -\frac{2t+1}{3}, \quad z = 2 - 2t.$$

直线在 Oxz 平面 ($y = 0$) 上的投影是保持 x, z 坐标不变、令 $y = 0$ 得到的点集:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

消去 t 得投影直线方程 (或者直接用上面的参数形式作为答案):

$$2x + z - 2 = 0, \quad y = 0.$$

(法二), 已知直线方程为:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 4x + 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

两个平面的法向量分别为:

$$\vec{n}_1 = (2, 3, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (4, 3, 1)$$

$$\Rightarrow \text{直线方向向量 } \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (3, -2, -6)$$

Oxz 平面的法向量为 $\vec{n} = (0, 1, 0)$

投影向量设为 $\vec{u}$

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{u} + \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta = \vec{u} + \vec{n} \cdot \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{v} - \vec{n} \cdot \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (-2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

最后求直线与 Oxz 的一个交点:

直接令 $y = 0$, 得

$$\begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ 4x + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 直线与 Oxz 的交点为 $(-\frac{1}{2}, 0, 3)$

$\Rightarrow$ 直线在 Oxz 上的投影为

$$\frac{x + \frac{1}{2}}{3} = \frac{z - 3}{-6}, \quad y = 0$$

化简: $2x + z - 2 = 0, y = 0$

三、向量空间与基 (15 分)

1. 证明 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 也是 V 的一组基。

- 证明：已知 $\alpha_i = e_1 + a_i e_2 + \dots + a_i^{n-1} e_n$ 。由基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 到 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 的过渡矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

该矩阵是范德蒙德 (Vandermonde) 矩阵，其行列式为 $\det(P) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$ 。因为给定的数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 各不相同，所以 $\det(P) \neq 0$ 。过渡矩阵满秩，因此 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 线性无关，构成 V 的一组基。

2. 证明： V 中必有一组基，使得每个基向量都不在诸 V_i 的并中。

- 证明：取 V 的一组基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 。对任意的正整数 k ，构造 V 中向量

$$\alpha_k = e_1 + k e_2 + \dots + k^{n-1} e_n,$$

得到向量族

$$S = \{\alpha_k \mid k = 1, 2, \dots\}$$

由题 1 可知， S 中任意 n 个不同的向量都构成 V 的一组基。因为 V_i 都是 V 的真子空间，所以每个 V_i 至多包含 S 中 $n-1$ 个向量。由于 S 是无限集合，故存在某个向量 α_k ，使得 α_k 不属于任何一个 V_i 。

进一步，在 S 中还存在 n 个不同的向量 $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_n}$ ，使得每个 α_{k_j} 都不属于任何一个 V_i ，此时 $\{\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_n}\}$ 就构成了 V 的一组基。

四、商空间 (10 分)

1. 给出商空间 V/V_1 的一个基。

- 解答：空间 $V = M_n(F)$ 的维数为 n^2 。子空间 V_1 由全体对角矩阵张成，维数为 n 。商空间 V/V_1 的维数为 $n^2 - n$ 。设 E_{ij} 为第 i 行第 j 列为 1，其余位置全为 0 的矩阵，商空间 V/V_1 的一个基可由所有非对角位置的基础矩阵的等价类构成：

$$\{E_{ij} + V_1 \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

2. 求商空间 $V/C(A)$ 的一个基。

- **解答：** 设 $X = (x_{ij})_{3 \times 3} \in C(A)$ 。由条件 $XA = AX$ ，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，通过矩阵乘法对应元素相等，可以解出 X 的形式必须满足： $x_{13} = 0, x_{23} = 0, x_{21} = 0, x_{33} = x_{22}$ 。因此 $C(A)$ 中的矩阵形如：

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{22} \end{pmatrix}$$

换句话说

$$C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 \\ k_4 & k_5 & k_3 \end{pmatrix} \mid k_i \in \mathbb{R}, i = 1 \dots 5 \right\} = \text{span}\{E_{11}, E_{12}, E_{22} + E_{33}, E_{31}, E_{32}\}$$

显然 $\dim(C(A)) = 5$ 。因此 $\dim(V/C(A)) = 9 - 5 = 4$ ，在 V 中找出 4 个不在 $C(A)$ 中且线性无关的基向量：

$$E_{13}, E_{21}, E_{23}, E_{33}$$

故商空间 $V/C(A)$ 的一个基为：

$$\{E_{13} + C(A), E_{21} + C(A), E_{23} + C(A), E_{33} + C(A)\}$$

五、最小多项式 (10 分)

- **题目：** 证明 $T - \lambda I$ 的最小多项式是 $q(z) = p(z + \lambda)$ 。
- **证明：** 首先将 $T - \lambda I$ 代入 $q(z)$ ，得到：

$$q(T - \lambda I) = p((T - \lambda I) + \lambda I) = p(T) = O$$

这说明多项式 q 适合 $T - \lambda I$ ，而且显然是首一的多项式，（因此接下来只需要证明 q 是次数最低的）。假设存在 $r(z)$ 使得 $\deg r < \deg q$ ，且 $r(T - \lambda I) = O$ 则可以考虑多项式： $r(z - \lambda)$ 直接带入 T 得：

$$r(T - \lambda I) = O$$

因此，由定义 $\deg p \leq \deg r(z - \lambda) = \deg r$ 。最后，由 $\deg q = \deg p$ ，可以推出矛盾： $\deg q \leq \deg r$ 。

六、线性算子与投影 (10 分)

1. 证明: $V = \ker \varphi \oplus \ker(I - \varphi)$ 。

- 证明: 已知算子定义为 $\varphi(f(x)) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 。(注意到 φ 作用偶函数保持不变, 可以考虑 φ^2) 注意到:

$$\varphi(\varphi(f(x))) = \varphi\left(\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right) = \frac{\frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(-x)+f(x)}{2}}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \varphi(f(x))$$

这说明 $\varphi^2 = \varphi$, 即 φ 的极小多项式无重根可对角化, 从而空间可以直和分解为它的核与它的像: $V = \ker \varphi \oplus \operatorname{Im} \varphi$ 。由于 $g \in \operatorname{Im} \varphi \iff \varphi(g) = g \iff (I - \varphi)(g) = 0 \iff g \in \ker(I - \varphi)$ 。故 $\operatorname{Im} \varphi = \ker(I - \varphi)$, 从而 $V = \ker \varphi \oplus \ker(I - \varphi)$ 。

2. 求算子 E 的代数表达式。

- 解答: 由题意 $E|_{\ker \varphi} = -I$ 和 $E|_{\ker(I - \varphi)} = I$ 。对于任意向量 $v \in V$, 根据 1, 存在唯一的 $v_1 \in \ker \varphi$ 与 $v_2 \in \ker(I - \varphi)$ 使得 $v = v_1 + v_2$ 。根据定义, $\varphi(v_1) = 0, \varphi(v_2) = v_2$ 。所以 $\varphi(v) = \varphi(v_1 + v_2) = v_2$ 。因此 $v_1 = v - v_2 = v - \varphi(v) = (I - \varphi)v$ 。现在对 v 作用 E :

$$E(v) = E(v_1 + v_2) = E(v_1) + E(v_2)$$

利用限制条件:

$$E(v) = -v_1 + v_2 = -(I - \varphi)v + \varphi v = (-I + 2\varphi)v$$

因此, E 的代数表达式为:

$$E = 2\varphi - I$$

七、内积空间与正交补 (10 分)

1. 证明: f 是 W 上的内积。

- 证明: 需要验证内积的四个性 (W 中元素均为实对称矩阵, $A = A^T$):

(1) 对称性: $f(A, B) = \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA) = f(B, A)$ 。

(2) 线性性: $f(c_1 A_1 + c_2 A_2, B) = \operatorname{Tr}((c_1 A_1 + c_2 A_2)B) = c_1 \operatorname{Tr}(A_1 B) + c_2 \operatorname{Tr}(A_2 B) = c_1 f(A_1, B) + c_2 f(A_2, B)$ 。

(3) 非负性: $f(A, A) = \operatorname{Tr}(A^2) = \operatorname{Tr}(A^T A)$ 。设 $A = (a_{ij})$, 则 $\operatorname{Tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0$ 。

(4) 正定性: 如果 $f(A, A) = 0$, 即 $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = 0$, 这必然要求所有的 $a_{ij} = 0$, 即 $A = O$ 。综上, f 是内积。

2. 求 S 的维数以及 S 在 W 中的正交补 $S^\perp$ 。

- **解答：** n 阶实对称矩阵空间 W 的维数是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 。子空间 S 定义为 $S = \{A \in W \mid \text{Tr}(A) = 0\}$ ，(只考虑对角矩阵 D 时， $\text{Tr}(D) = 0$ ，相当于一个 n 元线性方程，利用线性方程组的解法)：

$$U = \{D \text{ 为 } n \text{ 阶对角矩阵} \mid \text{Tr}(D) = 0\} \text{ 的维数为 } n-1$$

因此 S 的维数为：

$$\dim(S) = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

对于正交补 $S^\perp$ ，其维数必为 $\dim(W) - \dim(S) = 1$ 。考虑单位矩阵 $I \in W$ 。对任意 $A \in S$ ，有：

$$f(I, A) = \text{Tr}(IA) = \text{Tr}(A) = 0$$

这意味着 I 与 S 中的所有矩阵都正交，故 $I \in S^\perp$ 。因为 $\dim(S^\perp) = 1$ ，所以：

$$S^\perp = \text{span}\{I\}$$

(法二)：可以将矩阵的迹 Tr 看作是一个 W 上的线性泛函 $\varphi(A) = \text{Tr}(A)$ 。显然 φ 是线性泛函，且 $\varphi \neq 0$ (例如取 $A = I$ ， $\varphi(I) = n \neq 0$)。于是 $S = \ker \varphi$ ，故

$$\dim S = \dim W - \dim \text{Im } \varphi = \dim W - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1.$$

八、正算子乘积证明 (10 分)

1. 证明 T_1 和 T_2 可被同时正交对角化。

- **证明：**已知 T_1, T_2 是正算子，故它们必定是自伴随算子 ($T_1 = T_1^*, T_2 = T_2^*$)。因为自伴随算子 T_1 可以在 V 上正交对角化，所以 V 可以分解为 T_1 特征子空间的直和： $V = \bigoplus V_{\lambda_i}$ ，这些特征子空间相互正交。由于 T_1 和 T_2 可交换 ($T_1 T_2 = T_2 T_1$)，对于任意 $x \in V_{\lambda_i}$ ，有：

$$T_1(T_2 x) = T_2(T_1 x) = T_2(\lambda_i x) = \lambda_i(T_2 x)$$

这说明 $T_2 x \in V_{\lambda_i}$ ，即每个 V_{λ_i} 都是 T_2 的不变子空间。算子 T_2 限制在每个 V_{λ_i} 上依然是自伴随的，因此在每个 V_{λ_i} 内，可以找到一组由 T_2 的特征向量构成的规范正交基。因为这些向量本来就处在 V_{λ_i} 中，它们必然也是 T_1 的特征向量。汇总各子空间中的基底，便得到了全空间 V 的一组使得 T_1, T_2 同时正交对角化的规范正交基。

2. 证明算子乘积 $T_1 T_2$ 也是一个正算子。

- **证明:** 利用第 1 问的结论, 存在一组由公共特征向量组成的规范正交基 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 。设 $T_1 e_i = \lambda_i e_i$, 且 $T_2 e_i = \mu_i e_i$ 。因为 T_1, T_2 是正算子, 其特征值非负, 即对于所有的 i , 有 $\lambda_i \geq 0, \mu_i \geq 0$ 。考察乘积算子:

$$(T_1 T_2) e_i = T_1 (\mu_i e_i) = \mu_i T_1 e_i = \lambda_i \mu_i e_i$$

这说明 e_i 也是 $T_1 T_2$ 的特征向量, 对应的特征值为 $\lambda_i \mu_i$ 。显然 $\lambda_i \mu_i \geq 0$ 。另外, 由于 $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^* = T_2 T_1 = T_1 T_2$, 说明 $T_1 T_2$ 是自伴随算子。一个特征值全部非负的自伴随算子就是正算子。

九、幂零算子与多项式表示 (10 分)

1. **证明存在非零向量 $v \in V$ 使得 $\beta = \{v, Nv, \dots, N^{n-1}v\}$ 是一组基。**

- **证明:** 已知 $N^{n-1} \neq O$, 因此必定存在一个向量 $v \in V$ 满足 $N^{n-1}v \neq 0$ 。我们要证明这 n 个向量线性无关。假设存在一组复数使得:

$$c_0 v + c_1 Nv + c_2 N^2 v + \dots + c_{n-1} N^{n-1} v = 0$$

方程两边同乘 N^{n-1} 。由于 $N^n = O$, 所有包含 $N^k (k \geq 1)$ 的项都会在乘上 N^{n-1} 后变为 0。因此得到:

$$c_0 N^{n-1} v = 0$$

因为 $N^{n-1}v \neq 0$, 所以必定有 $c_0 = 0$ 。将 $c_0 = 0$ 代回原方程, 接着同乘 N^{n-2} , 同理可得 $c_1 N^{n-1}v = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ 。以此类推, 可推导出 $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$ 。由于这 n 个向量线性无关, 并且 V 是 n 维空间, 故它们构成了 V 的一组基。

2. **证明算子 T 必然可以表示为 N 的多项式。**

- **证明:** 根据第一问, $\beta = \{v, Nv, \dots, N^{n-1}v\}$ 是 V 的基。因此向量 Tv 可以被这组基线性表出。即存在唯一的一组复数 $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ 使得:

$$Tv = c_0 v + c_1 Nv + \dots + c_{n-1} N^{n-1} v$$

我们构造多项式算子 $P(N) = c_0 I + c_1 N + \dots + c_{n-1} N^{n-1}$ 。由上式知 $Tv = P(N)v$ 。接着, 我们要证明对 β 中的所有向量 $N^k v$, T 与 $P(N)$ 的作用结果均相同。由于已知 T 与 N 可交换 ($TN = NT$), 故 T 与 N^k 亦可交换。于是:

$$T(N^k v) = N^k(Tv) = N^k(P(N)v) = P(N)(N^k v)$$

这说明线性算子 T 和 $P(N)$ 在基 β 的所有基向量上作用结果完全相等, 即两个算子在空间上完全等价:

$$T = c_0 I + c_1 N + \dots + c_{n-1} N^{n-1}$$