线性代数 II（H）2024-2025 春夏期末

图灵回忆卷　　by jayi0908

2025 年 6 月 18 日

一、(16 分) $P_0(1,0,1)$ 到平面 $x+y+z=D(D>0)$ 的距离为 $\sqrt{3}$，求 P_0 到直线 $\begin{cases} x+y+z=D \\ x-y+z=1 \end{cases}$ 的距离.

二、(16 分) V 为次数不超过 2 的实数多项式空间，定义在 V 上的内积为 $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$，记 $W=\{p(0)=0|p\in V\}$，(1) 求 W 的正交补；(2) 求 $f\in V$ 使得 $\langle p,f\rangle=p(0)$ 对 $\forall p\in V$ 都成立.

三、(12 分) $A\in\mathbb{C}^{7\times 7}$，且存在 $B\in\mathbb{C}^{7\times 7}$，$X\in\mathbb{C}^{7\times 1}$ 使得 $A=B^2$，$A^3X\neq O$，$A^4X=O$，证明 $r(A)=5$.

四、(12 分) 设 T 为维数为 $n(n\geq 3)$ 的线性空间 V 上的幂零算子，且 $r(T)=1$，求 T 的 Jordan 标准形，并证明 V 有无穷多个二维的 T-不变子空间.

五、(20 分) 试给出下列命题的真伪. 若命题为真，请给出简要证明；若命题为假，请举出反例.

1. T 为实算子，且只有特征值 1 和 2，则 $T^2-3T+2I=O$.

2. 实算子 T 有非平凡子空间，则有特征值.

3. U 为 V 的一个子空间，则可取 U 的补空间的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_s$，使得 $\varepsilon_1+U,\cdots,\varepsilon_s+U$ 为商空间 V/U 的一组基.

4. T 为实内积空间上的算子，且 T 在某组基下有对称矩阵，则 T 是自伴算子.

5. 设 s 为 T 的奇异值，则存在单位向量 α 使得 $\|T\alpha\|=s$.

六、(12 分) 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_5$ 为 $\mathbb{R}^5$ 的一组基，T 为 $\mathbb{R}^5$ 上的算子且 $T(\varepsilon_i)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3(i=1,2,3)$，$T(\varepsilon_j)=\varepsilon_4+\varepsilon_5(j=4,5)$，求 T 的极小多项式与 $T^{2025618}$.

七、(12 分) 对于算子 T，记 $G=T^*T$，证明以下等价：

(1) T 是正规算子；

(2) 存在等距同构 S 使得对任意向量 v，$Tv=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{d_i}\sqrt{\lambda_i}\langle v,\varepsilon_{ij}\rangle S\varepsilon_{ij}$，其中 $\{\varepsilon_{ij}\}_{j=1}^{d_i}$ 是 $E(\lambda_i,G)$ 的一组基，且 $E(\lambda_i,G)$ 是 S 不变的.

(3) 存在等距同构 S' 使得 $T^2=S'G$，且 $\operatorname{Im}T=(\operatorname{Ker}T)^{\perp}$.