线性代数 II（H）2024-2025 春夏期末答案

图灵回忆卷　　by jayi0908

2025 年 6 月 18 日

一、 **(16 分)** 点 $P_0(1,0,1)$ 到平面 $x+y+z=D$ 的距离为 $\sqrt{3}$，由点到平面距离公式：

$$\frac{|1+0+1-D|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3} \implies |2-D|=3 \implies D=5 \quad (D>0)$$

直线 $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ 的方向向量为两平面法向量的叉乘：

$$\boldsymbol{n}_1=(1,1,1),\ \boldsymbol{n}_2=(1,-1,1) \implies \boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(2,0,-2)$$

取直线上点$Q(0,2,3)$，向量$\overrightarrow{P_0Q}=(-1,2,2)$，外积：

$$\overrightarrow{P_0Q}\times\boldsymbol{v}=(-4,2,-4)$$

距离为：

$$\frac{|\overrightarrow{P_0Q}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

二、 **(16 分)**

(1) $W=\{a_0x^2+b_0x|a_0,b_0\in\mathbb{R}\}$，设 $f(x)=a_1x^2+b_1x+c_1\in W^{\perp}$，由正交性得：

$$\int_0^1(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_0x^2+b_0x)dx=0$$

$$\implies a_0(\frac{1}{5}a_1+\frac{1}{4}b_1+\frac{1}{3}c_1)+b_0(\frac{1}{4}a_1+\frac{1}{3}b_1+\frac{1}{2}c_1)=0 \implies b_1=-4c_1, a_1=\frac{10}{3}c_1$$

取 $c_1=3$，得 $W^{\perp}=\mathrm{span}\{10x^2-12x+3\}$.

(2) 设 $p(x)=a_0x^2+b_0x+c_0$，则

$$\langle p,f\rangle=a_0(\frac{1}{5}a_1+\frac{1}{4}b_1+\frac{1}{3}c_1)+b_0(\frac{1}{4}a_1+\frac{1}{3}b_1+\frac{1}{2}c_1)+c_0(\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{2}b_1+c_1)=p(0)=c_0$$

从而由 (1) 可得：$b_1=-4c_1, a_1=\frac{10}{3}c_1, \frac{1}{3}a_1+\frac{1}{2}b_1+c_1=1$

解得 $c_1=9$，$f(x)=30x^2-36x+9$.

三、 **(12 分)** 证明：由条件 A 为幂零矩阵，且 $A^3=B^6\neq O$，$A^4=B^8=O$（因为 B 只有 7 阶且幂零），故 B 的若当块一定是 $J_7(0)$，故 $r(A)=r(B^2)=5$.

四、 **(12 分)** 幂零算子 T 的秩为1，故其 Jordan 标准形有 $n-1$ 个若当块，只能为一个 $J_2(0)$ 和 $n-2$ 个 $J_1(0)$，即一个除了第一行第二列元素为 1 之外其余元素均为 0 的方阵。

对任意 a，$U_a=\mathrm{span}\{e_2,e_1+ae_3\}$ 是二维 T-不变子空间，且有无穷多个。得证。

五、 (20 分)

1. 假：反例：设T在基下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$，特征值为1和2，但

$$T^2-3T+2I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&4\\0&0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&6&3\\0&0&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\neq O.$$

2. 假：反例：设算子 T 在自然基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，显然每个对角块对应一个非平凡不变子空间，但是它的特征多项式为 $(x^2-2x+2)^2$ 无实根，故没有实特征值。

3. 真：设 W 是 U 的补空间，取 W 的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_s$ 并扩展成 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_s,\cdots,\varepsilon_n$.对任意 $v\in V$，$v=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\varepsilon_i$，故 $v+U=\sum\limits_{i=1}^{s}b_i(\varepsilon_i+U)$（因为对 $s+1\geq k\geq n$，由于 $\varepsilon_k\in U$，故 ε_k+U 为 V/U 的零元），且 $\{\varepsilon_i+U\}_{i=1}^{s}$ 是线性无关组，因此是 V/U 的基。

4. 假：非标准正交基下对称矩阵未必对应自伴算子。例如基 $\{(1,0),(1,1)\}$ 上矩阵 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，其在自然基下的矩阵表示为 $\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$，不难验证其不满足 $\langle Tv,w\rangle=\langle v,Tw\rangle$。

5. 真：设 s 是奇异值，则 $s=\sqrt{\lambda}$，λ 为 $G=T^*T$ 的特征值。取单位特征向量 α，则 $\|T\alpha\|^2=\langle T^*T\alpha,\alpha\rangle=\lambda\langle\alpha,\alpha\rangle=\lambda$，故 $\|T\alpha\|=s$.

六、 (12 分) 设 $U=\mathrm{span}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$，$V=\mathrm{span}\{\varepsilon_4,\varepsilon_5\}$，

$T|_U$满足$(T|_U)^2=3T|_U$，极小多项式为 $x(x-3)$；

$T|_V$满足$(T|_V)^2=2T|_V$，极小多项式为 $x(x-2)$；

从而整体极小多项式为最小公倍式：$x(x-2)(x-3)$.

归纳易得 $(T|_U)^n=3^{n-1}T|_U$，$(T|_V)^n=2^{n-1}T|_V$，故

$$T^{2025618}(\varepsilon_i)=3^{2025617}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\,(i=1,2,3),\quad T^{2025618}(\varepsilon_j)=2^{2025617}(\varepsilon_4+\varepsilon_5)\,(j=4,5).$$

七、 (12 分) (1) $\implies$ (2)：

假设 T 是正规算子，则存在一组标准正交基 $\{f_k\}$ 使得 $Tf_k=\mu_kf_k$ 且 $T^*f_k=\overline{\mu}_kf_k$。于是：

$$Gf_k=T^*Tf_k=|\mu_k|^2f_k.$$

设 λ_i 为 G 的不同特征值，特征空间 $E(\lambda_i,G)$ 由满足 $|\mu_k|^2=\lambda_i$ 的 f_k 张成。取 $\{\varepsilon_{ij}\}_{j=1}^{d_i}$ 为 $E(\lambda_i,G)$ 的标准正交基。定义 S 在 $E(\lambda_i,G)$ 上的作用为：

$$S\varepsilon_{ij}=\frac{\mu_k}{\sqrt{\lambda_i}}\varepsilon_{ij}$$

其中 μ_k 是 ε_{ij} 对应的 T 的特征值。由于 $\left|\frac{\mu_k}{\sqrt{\lambda_i}}\right|=1$，从而 S 在 $E(\lambda_i,G)$ 上是等距同构且 $E(\lambda_i,G)$ 在 S 下不变。将其扩展至整个空间可知 S 仍为等距同构，且每个 $E(\lambda_i,G)$ 在 S 下不变。

对任意向量 v，展开得：

$$Tv=\sum_k\mu_k\langle v,f_k\rangle f_k=\sum_i\sum_j\mu_k\langle v,\varepsilon_{ij}\rangle\varepsilon_{ij}=\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i}\langle v,\varepsilon_{ij}\rangle S\varepsilon_{ij},$$

故 (2) 成立。

(2) $\implies$ (1)：

已知 $Tv=\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i}\langle v,\varepsilon_{ij}\rangle S\varepsilon_{ij}$，其中 $\{\varepsilon_{ij}\}$ 是 $E(\lambda_i,G)$ 的标准正交基，S 在 $E(\lambda_i,G)$ 不变。

计算 T^*：对任意 u,v，

$$\begin{aligned}\langle Tu,v\rangle&=\left\langle\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i}\langle u,\varepsilon_{ij}\rangle S\varepsilon_{ij},v\right\rangle=\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i}\langle u,\varepsilon_{ij}\rangle\langle S\varepsilon_{ij},v\rangle\\&=\overline{\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i}\langle v,S\varepsilon_{ij}\rangle\langle\varepsilon_{ij},u\rangle}=\overline{\left\langle\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i}\langle v,S\varepsilon_{ij}\rangle\varepsilon_{ij},u\right\rangle}.\end{aligned}$$

因此，

$$T^*v=\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i}\langle v,S\varepsilon_{ij}\rangle\varepsilon_{ij}.$$

由于

$$\langle Tv,S\varepsilon_{ij}\rangle=\left\langle\sum_{k,l}\sqrt{\lambda_k}\langle v,\varepsilon_{k,l}\rangle S\varepsilon_{k,l},S\varepsilon_{ij}\right\rangle=\sum_{k,l}\sqrt{\lambda_k}\langle v,\varepsilon_{k,l}\rangle\langle S\varepsilon_{k,l},S\varepsilon_{ij}\rangle=\sqrt{\lambda_i}\langle v,\varepsilon_{ij}\rangle,$$

故

$$T^*Tv=\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i}\cdot\sqrt{\lambda_i}\langle v,\varepsilon_{ij}\rangle\varepsilon_{ij}=Gv.$$

同理：

$$TT^*v=\sum_{i,j}\lambda_i\langle v,S\varepsilon_{ij}\rangle S\varepsilon_{ij}.$$

因为 S 是酉算子，且 $E(\lambda_i,G)$ 在 S 下不变，故 $\{S\varepsilon_{ij}\}$ 是 $E(\lambda_i,G)$ 的标准正交基，故 $TT^*=\sum_i\lambda_i\langle v,S\varepsilon_{ij}\rangle S\varepsilon_{ij}=G$。因此 $T^*T=TT^*$，即 T 正规。

(1) $\implies$ (3)：

假设 T 正规，则 $\operatorname{Im}T=(\operatorname{Ker}T)^\perp$（因正规算子满足 $\operatorname{Ker}T=\operatorname{Ker}T^*$）。

对 T^2 用极分解，有 $T^2=S'\sqrt{(T^2)^*T^2}=S'\sqrt{T^*(T^*T)T}=S'\sqrt{(T^*T)^2}=S'G$，成立。

(3) $\implies$ (1)：

由条件，对 $\forall v$，$\|T^2v\| = \|T^*Tv\|$，即

$$\langle T^2v, T^2v\rangle - \langle T^*Tv, T^*Tv\rangle = \langle T^*T^2v, v\rangle - \langle T(T^*T)v, Tv\rangle = \langle (T^*T - TT^*)Tv, Tv\rangle = 0.$$

由于 $T^*T - TT^*$ 是自伴的，故由自伴算子的性质知 $T^*T - TT^*$ 在 $\operatorname{Im} T$ 上的限制为零算子。

由于 $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T)^{\perp} = (\operatorname{Ker} T^*)^{\perp}$，则 $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$，故对 $\forall v \in \operatorname{Ker} T$，有 $(T^*T - TT^*)v = 0$，即 $T^*T - TT^*$ 在 $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$ 上的限制为零算子。

因此 $T^*T - TT^*$ 在整个空间上为零算子，即 $T^*T = TT^*$，即 T 是正规算子。

综上，(1)(2)(3)等价。