线性代数 II（H）2024-2025 春夏期中

图灵回忆卷

2025 年 4 月 23 日

一、(10 分) 求过点 $(1,0,2)$ 与平面 $3x-y+2z+2=0$ 平行，且与直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 相交的直线方程。

二、(10 分) 设 V 为有限维线性空间，T 是 V 到 V 的线性映射。若 $T^2-3T+2I=0$，证明：

$$V=\operatorname{null}(T-I)\oplus\operatorname{range}(T-I)$$

三、(10 分) 设 $v_1,\ldots,v_n$ 为有限维线性空间 V 的一组基，$\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ 为其对偶基。设 $\psi\in V^*$，证明：

$$\psi=\psi(v_1)\varphi_1+\cdots+\psi(v_n)\varphi_n$$

四、(10 分) 设 $p\in\mathbb{C}[x]$，$p\neq 0$，令 $U=\{pq\mid q\in\mathcal{P}(\mathbb{C})\}$。

1. 证明：$\dim(\mathcal{P}(\mathbb{C})/U)=\deg p$;
2. 求 $\mathcal{P}(\mathbb{C})/U$ 的一组基。

五、(10 分) 设 V 为有限维内积空间，$S,T\in L(V)$. 称 S,T 可同时对角化，若存在 V 的一组基，使得 S 和 T 在这组基下的矩阵都是对角矩阵。若 S 和 T 可对角化，证明：它们可同时对角化当且仅当 $ST=TS$.

六、(10 分) 设 A 为 n 阶实方阵，记 A^T 为 A 的转置。证明 $\dim E(\lambda,A)=\dim E(\lambda,A^T)$。

七、(10 分) 设 W_1,W_2 为有限维内积空间的子空间。证明：

$$(W_1+W_2)^\perp=W_1^\perp\cap W_2^\perp;\quad (W_1\cap W_2)^\perp=W_1^\perp+W_2^\perp$$

八、(10 分) 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积，设列向量 $x_1,\cdots,x_p\in\mathbb{R}^n$，$\sum\limits_{i=1}^{p}x_i=0$. 记 $X=(x_1,\cdots,x_p)$，设 XX^T 有 n 个不同的正特征值，给定 $k\in\mathbb{N}_+$，$k<n$，考虑 PCA 算法：

1. $C=XX^T$
2. 取 $\lambda_1\geq\cdots\lambda_k$ 为 C 最大的 k 个特征值，$v_1,\cdots,v_k$ 为对应的单位特征向量
3. 令 $V=\operatorname{span}\{v_1,\cdots,v_k\}$，$U=(v_1,\cdots,v_k)$，$P_V=UU^T$
4. 令 $y_i=P_Vx_i$，$i=1,\cdots,n$

证明：

1. $\{v_1, \cdots, v_k\}$ 为 V 的规范正交基，且 P_V 为 $\mathbb{R}^n$ 到 V 的正交投影.

2. PCA 算法最小化投影误差. 即 $\forall W$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子空间，P_W 为正交投影，$\sum_{i=1}^{p} \|x_i - y_i\|^2 \leq \sum_{i=1}^{p} \|x_i - P_W x_i\|^2$.

九、(20 分) 试判断下列命题的真伪。若命题为真，请给出简要证明；若命题为假，请举出反例。

1. 任意空间向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$；

2. 每个非常数的复系数多项式都有零点；

3. 设 $T \in L(V)$，存在 V 的一组基 $\{v_1, \ldots, v_n\}$，使得 T 关于这组基的矩阵是对角矩阵；

4. 设 $V = C([0,1])$（即 V 为 $[0,1]$ 区间上连续函数全体构成的线性空间），$\langle f, g \rangle = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ 为 V 上的内积。