22-23 春夏数分期末参考答案

Fairicle

2023 年 7 月 3 日

写在前面：答案仅供参考，不保证一定正确。欢迎指出错误和提出修改建议！

1. $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, \forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$

证明：$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sqrt{x^2}.$

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{n^4}} - \sqrt{x^2} = \frac{1}{n^4(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^4}} + \sqrt{x^2})} = \frac{1}{n^2(\sqrt{n^4x^2+1} + \sqrt{n^4x^2})} < \frac{1}{n^2}.$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = \lfloor \tfrac{1}{\epsilon} \rfloor + 1, \forall n > N, \forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^4}} - \sqrt{x^2} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N^2} < \epsilon.$$

2.

(1) 记 $u = x^2e^{-y}, v = xy$. 记 f_1, f_2 分别表示 f 关于第一个元素和第二个元素求偏导，f_{11}, f_{12}, f_{22} 同理。

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1\frac{\partial u}{\partial y} + f_2\frac{\partial v}{\partial y} = f_1(-x^2e^{-y}) + f_2x.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = -2xe^{-y}f_1 + f_2 - 2x^3e^{-2y}f_{11} + (2x^2e^{-y} - x^2ye^{-y})f_{12} + xyf_{22}.$$ （不知道对不对

(2) 对方程关于 x 求偏导，得 $\begin{cases} 2x + 2y\dfrac{\partial y}{\partial x} + 2z\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ 1 + 2\dfrac{\partial y}{\partial x} + 3\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{cases}$. 带入 $(1,1,-1)$ 得 $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{4}{5}, \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{5}$. 从而切线方向向量为 $(1, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{1}{5})$，切线方程为 $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{1}$，法平面方程为 $5(x-1) - 4(y-1) + z = 0.$

(3) $I = \displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1+e^{2t}} \times \sqrt{1+e^{2t}}\mathrm{d}t = (t + \frac{e^{2t}}{2})\Big|_{t=0}^\pi = \pi + \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2}.$

(4) 添加曲线 $S_1 : y = 0(x : -1 \to 1)$，有 $I = \displaystyle\int_{C+S_1} - \int_{S_1}.$

使用 Green 公式，$\displaystyle\int_{C+S_1} = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1, y\ge 0} (3x^2 + 3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^1 3r^3\mathrm{d}r = \frac{3\pi}{4}.$

$$\int_{S_1}=\int_{-1}^{1}e^x\mathrm{d}x=e-\frac{1}{e}.$$

故 $I=\dfrac{3\pi}{4}-e+\dfrac{1}{e}.$

(5) 球坐标变换，$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases},\varphi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi].$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt[4]{r^2}\times(r^2\sin\varphi)\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{2}{7}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{8\pi}{7}.$$

3. 取方向向量 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$，沿该方向的方向导数为 $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}=\sqrt[3]{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}$ 存在。由 α 任意性知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处沿任意方向的方向导数存在。

下证不可微：首先通过定义求出 $(0,0)$ 处的 x 偏导和 y 偏导均为 1.

$\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-\Delta x-\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}-\Delta x-\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$. 让左式中 $\Delta x=\Delta y$，得左式值不为 0，从而 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时 $\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-\Delta x-\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 的极限不为 0 或不存在。

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微。

4. 由根式判别法得到收敛半径为 1，带入 $x=1,-1$ 发现均不收敛，从而收敛域为 $(-1,1)$.

记 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},g(x)=(\frac{1}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2},\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=xg(x)=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

记 $h(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\int_0^x h(t)\mathrm{d}t=-\ln(1-x).$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+\dfrac{1}{n})x^n$ 和函数为 $\dfrac{x}{(1-x)^2}-\ln(1-x)$.

5. 记二元函数 $F(x,y)=\sin y+\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}-x$. 有 $F_y(x,y)=\cos y+\dfrac{e^y+e^{-y}}{2},F_x(x,y)=-1.$

则 (1) $F(0,0)=0$

(2) 在 $(0,0)$ 的一个邻域内 $F(x,y)$ 连续且偏导连续

(3) $F_y(0,0)=2\neq0.$

由一元隐函数存在定理知，在 $(0,0)$ 的某邻域内存在唯一的可导函数 $y=\varphi(x)$ 满足 $\sin y+\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}=x$，且 $\varphi'(x)=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=\dfrac{2}{2\cos y+e^y+e^{-y}}$.

6. 把 $\dfrac{\pi-x}{2}$ 延拓为 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-\pi-x}{2}, x\in[-\pi,0)\\ 0, x=0\\ \dfrac{\pi-x}{2}, x\in(0,\pi]\end{cases}$.

对 $f(x)$ 做傅里叶展开，有 $a_n=0, b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n}$.

又 $f(x)$ 分段光滑，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}=\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

$x\in(0,\pi)$ 时有 $f(x+)=f(x-)=f(x)$，故 $\forall x\in(0,\pi), \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}=\dfrac{\pi-x}{2}$.

7.

(1) $n>2$ 时 $|\dfrac{\sin nx}{n^2\ln n}|<\dfrac{1}{n^2}$，由优级数判别法知 $f(x)$ 一致收敛。又因对于任意大于 1 的正整数 n 有 $\dfrac{\sin nx}{n^2\ln n}$ 关于 x 连续，从而 $f(x)$ 连续。

(2) 因为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 是发散的，由 Cauchy 准则有 $\exists\epsilon_0>0, \forall N\in\mathbb{N}^+, \exists m>n>N, \sum\limits_{k=n+1}^{m}\dfrac{1}{k\ln k}\geq\epsilon_0$.

故 $\exists\epsilon_1=\dfrac{\epsilon_0}{2}, \forall N\in\mathbb{N}^+, \exists m>n>N, \exists x_0=\dfrac{\pi}{3m}, |\sum\limits_{k=n+1}^{m}\dfrac{\cos kx_0}{k\ln k}|\geq\sum\limits_{k=n+1}^{m}\dfrac{\cos mx_0}{k\ln k}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=n+1}^{m}\dfrac{1}{k\ln k}\geq\epsilon_1$

由 Cauchy 准则可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\ln n}$ 在 $(0,\pi)$ 非一致收敛。

(3) 可以发现 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\dfrac{\sin nx}{n^2\ln n})=\dfrac{\cos nx}{n\ln n}$，因此只需证明 $g(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\ln n}$ 在 $(0,\pi)$ 内闭一致收敛。以下证明。

对任意 $\delta\in(0,\dfrac{\pi}{2}), x\in[\delta,\pi-\delta]$，有 $\dfrac{1}{n\ln n}$ 单调收敛于 0，则 $\dfrac{1}{n\ln n}$ 关于 x 一致收敛于 0.

又 $|\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx|=\dfrac{|\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}|}{2|\sin\frac{x}{2}|}\leq\dfrac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$，故根据 Dirichlet 判别法，$g(x)$ 在 $[\delta,\pi-\delta]$ 一致收敛。

由 δ 任意性，$g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内闭一致收敛。则由一致收敛函数的逐项求导定理，可知 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 可导，且 $f'(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\ln n}$.