数学分析（甲）II（H）2022 春夏期末

21 级图灵回忆卷

2022 年 6 月 15 日

一、(10 分) 叙述定义在区间 I 上的函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$ 的定义。并利用定义证明 $\left\{\dfrac{\sin(nx)}{n^2}\right\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

二、(10 分) 定义函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续且有偏导数，但在 $(0,0)$ 处不可微.

三、(10 分) 利用依据说明 $e^{x+y+1}-x^2y=e$ 可以确定唯一的隐函数 $y=y(x)$，并求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

四、(32 分) 计算

1. $\displaystyle\iiint_V z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 为 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$，$R$ 为正常数.

2. $\displaystyle\oint_L(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-y+z=2\end{cases}$，方向为 z 轴正方向看为逆时针.

3. $\displaystyle\int_L e^x(1-\sin y)\mathrm{d}x-e^x(1-\cos y)\mathrm{d}y$，其中 L 为 $y=\sin x$ 从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段曲线.

4. $\displaystyle\iint_\Sigma 2xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(z-2yz-z^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0$，上侧为正侧.

五、(10 分) 求函数 $f(x,y)=xy+x-y$ 在 $x^2+y^2\leq 5$ 上的最大值和最小值.

六、(10 分) 求函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$ 的收敛半径、收敛域以及和函数.

七、(10 分) 设 $f(x)$ 为周期为 2π 的周期函数，且 $f(x)=\dfrac{1}{4}x(2\pi-x), 0\leq x\leq 2\pi$，将其展开为 Fourier 级数，并证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

八、(8 分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，定义函数列 $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x+\frac{k}{n}\right)$，证明 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛.