数学分析（甲）II（H）2021 - 2022 春夏期末试答

Shad0wash

2024 年 2 月 8 日

一、一致收敛定义

对于函数列 $\{f_n(x)\}$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 其取值与 x 无关, 当 $n>N$ 时, $\forall x\in D$, 有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $f(x)$, 记作 $f_n(x)\xrightarrow{D}f(x)$.

$f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^2}$, $f(x)=0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right]$, 当 $n>N$ 时, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{\sin nx}{n^2}-0\right|\leqslant\frac{1}{n^2}<\frac{1}{N^2}=\varepsilon.$$

故 $\left\{\dfrac{\sin nx}{n^2}\right\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 0.

二、可偏导与可微

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}, \text{则}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^2|\sin\theta\cos\theta|}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\rho|\sin\theta\cos\theta|=0=f(0,0),$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续. 而

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导. 但是

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-(f'(0,0)x+f'(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^2|\sin\theta\cos\theta|}{\rho^2}=|\sin\theta\cos\theta|,$$

取值与 θ 有关, 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

三、隐函数存在定理与隐函数求导

Warning: 图灵回忆卷此处回忆有误，应为 $e^{x+y+1}+x^2y=e$ 在 $(0,0)$ 的某邻域内唯一确定 y 关于 x 的函数.

记 $F(x,y)=e^{x+y+1}+x^2y-e$, $F(0,0)=0$. $\exists\delta>0$, 使得 $F(x,y)$ 在 $U(O,\delta)$ 内连续, 且 $F_y'(x,y)=e^{x+y+1}+x^2$ 在上述 $U(O,\delta)$ 内连续，并成立 $F_y'(x,y)>0$, 故由隐函数存在定理, $F(x,y)$ 在 $U(O,\delta)$ 内可唯一确定 y 关于 x 的函数 $y=f(x)$, 且 $F(x,f(x))=0$.

等式 $e^{x+y+1}+x^2y-e=0$ 两边同时对 x 求导可得

$$e^{x+y+1}(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})+2xy+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$
$$(e^{x+y+1}+x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-e^{x+y+1}-2xy,$$

故 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,0)}=-1$. 继续对 x 求导可得

$$(e^{x+y+1}+x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(e^{x+y+1}(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})+2x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-(e^{x+y+1}(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})+2(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})),$$

代入 $(0,0)$ 可得 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{(0,0)}=0$.

四、多元函数积分计算

1.

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\\&=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}\rho^5\,\mathrm{d}\rho\\&=-2\pi\times\frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^{\pi}\times\frac{1}{6}\rho^6\Big|_0^{R}=\frac{2}{9}\pi R^6.\end{aligned}$$

2. 设 Σ 为曲线在平面 $x-y+z=2$ 上围成的部分，取上侧. 则

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\z-y&x-z&x-y\end{vmatrix}\\&=\iint_{\Sigma}(-1+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(1-1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(1+1)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\&=2\iint_{\Sigma}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=2\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S\cos\beta=2\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\cos\gamma}\cos\beta=-2\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\pi\end{aligned}$$

其中 $\vec{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ 为平面的单位法向量.

3. 添加 L: $y=0$, x 从 π 到 0. $I=\int_{C+L}-\int_{L}=-\iint_{D}+\int_{L-}$.

$\int_{L-}=e^x(1-\cos y)\,\mathrm{d}x-e^x(1-\sin y)\,\mathrm{d}y=0$. 故

$$\begin{aligned}I&=-\iint_{D}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\P&Q\end{vmatrix}=\iint_{D}(e^x(1-\sin y)+e^x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_{D}e^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}e^x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}e^x\sin x\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

进而运用分部积分

$$I = e^x \sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x \,\mathrm{d}x = -\, e^x \cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin x \,\mathrm{d}x = (e^\pi + 1) - I,$$

$$I = \frac{e^\pi + 1}{2}.$$

4. 添加平面 $D = \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ z = 0 \end{cases}$，取下侧. $I = \iint\limits_{\Sigma+D} - \iint\limits_{D} = \iiint\limits_{\Omega} + \iint\limits_{D-}$.

$$\iint\limits_{D-} = \iint\limits_{D-} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi$$

$$\iiint\limits_{\Omega} = \iiint\limits_{\Omega} 2y + 2z + (1 - 2y - 2z)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V = \frac{2}{3}\pi.$$

$$I = \frac{5}{3}\pi.$$

五、有条件极值

讨论点在内部还是在边缘. $D\colon x^2 + y^2 \leqslant 5$, $f(x, y) = xy + x - y$.

1. $(x, y) \in D^o$. 令

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = y + 1 = 0, \\ f'_y(x, y) = x - 1 = 0, \end{cases}$$

解得 $(x, y) = (1, -1)$, 设为点 P. 因为 $x_p^2 + y_p^2 = 2 < 5$, 故 $P \in D^o$. 但 $A = f''_{xx}(P) = 0, C = f''_{yy}(P) = 0, B = f''_{xy}(P) = 1$, 有 $B^2 - AC = 1 > 0$, 所以 $f(P)$ 不是极值.

2. $(x, y) \in \partial D$. 利用拉格朗日乘数法, 设 $L(x, y, \lambda) = xy + x - y - \lambda(x^2 + y^2 - 5)$, 令

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = y + 1 - 2\lambda x = 0, \\ L'_y(x, y, \lambda) = x - 1 - 2\lambda y = 0, \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 5 = 0, \end{cases}$$

联立 $\begin{cases} y + 1 - 2\lambda x = 0, \\ x - 1 - 2\lambda y = 0, \end{cases}$ 可得 $(1 - 2\lambda)(x + y) = 0$.

- 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 解得 $(x, y) = (2, 1)$ 或 $(x, y) = (-1, -2)$, 分别设为 Q_1, Q_2. 代入得 $f(Q_1) = f(Q_2) = 3$.
- 当 $x + y = 0$ 时, 代入解得 $(x, y) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ 或 $(x, y) = (\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, 分别设为 Q_3, Q_4. 代入得 $f(Q_3) = f(Q_4) = -5 - 2\sqrt{5}$.

故 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值为 3, 最小值为 $-5 - 2\sqrt{5}$.
（其实也可以三角函数代换来解，说明起来更充分些）

六、函数项级数的基本计算

设 $u = \frac{1}{3}x$, 则 $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n+1}$. $u = -1$ 时，I 收敛；$u = 1$ 时，I 发散. 故 I 的收敛域为 $[-3, 3)$, $r = 3$.

$$uI=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$(uI)'=\sum_{n=0}^{+\infty}u^n=\frac{1}{1-u},\quad u\in[-1,1)$$

$$uI=-\ln(1-u),\quad u\in[-1,1)$$

$$I=-\frac{\ln(1-u)}{u}=-\frac{3\ln\left(1-\frac{1}{3}x\right)}{x},\quad x\in[-3,3).$$

七、 Fourier 级数

进行周期延拓，其为偶函数，故 $b_n=0$.

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}x(2\pi-x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{\pi}{2}x\cos nx-\frac{1}{4}x^2\cos nx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2n}\int_0^{2\pi}x\,\mathrm{d}(\sin nx)-\frac{1}{4n\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,\mathrm{d}(\sin nx)\\&=\frac{1}{2n}\,x\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4n\pi}\,x^2\sin nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2n^2\pi}\,x\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2n^2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n^2},n\geqslant 1.\end{aligned}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}x(2\pi-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4\pi}\,(\pi x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{4\pi}\times\frac{4\pi^3}{3}=\frac{\pi^2}{3}.$$

所以

$$f(x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

$$\frac{1}{4}x(2\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

当 $x=0$ 时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

八、复杂函数列一致收敛的证明

$$F(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x+\frac{k}{n})=\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x+t)\,\mathrm{d}t\,.$$

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x+\frac{k}{n})=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x+\frac{k}{n})\,\mathrm{d}t\,.$$

$$|f_n(x)-F(x)|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}(f(x+\frac{k}{n})-f(x+t))\,\mathrm{d}t\right|.$$

$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，则 $\forall[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$, $f(x)$ 在其上一致连续. 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $x',x''\in[\alpha,\beta]$ 时，若 $|x'-x''|<\delta$, 则 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\dfrac{1}{\delta}\right]+1$, 当 $n>N$ 时，$\left|(x+\dfrac{k}{n})-(x+t)\right|\leqslant\dfrac{1}{n}<\delta$, 故

$$|f_n(x)-F(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|(f(x+\frac{k}{n})-f(x+t))\right|\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varepsilon\,\mathrm{d}t=\varepsilon.$$

即有 $\{f_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛.