数学分析（甲）II（H）2020 - 2021 春夏期末试答

Shad0wash

2024 年 2 月 8 日

一、多元函数可微性

1. $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若存在常数 A,B 对充分小的 $\Delta x,\Delta y$ 均有

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\quad \rho\to 0.$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微.

2. $f(x,y)=(xy)^{\frac{5}{7}},\quad f'_x(0,0)=0,\quad f'_y(0,0)=0$. 并且有

$$\begin{aligned}&\frac{|f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&=\frac{|(xy)^{\frac{5}{7}}|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{|(xy)^{\frac{5}{7}}|}{\sqrt{2}|xy|^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|xy|^{\frac{3}{14}}\to 0,\quad (x,y)\to(0,0).\end{aligned}$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

二、反常积分与级数的敛散性

1. $\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. 而 $\left|\displaystyle\int_1^u\sin x\,\mathrm{d}x\right|=|\cos u-\cos 1|\leqslant 2$, 由 Dirichlet 判别法知，积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 而

$$\frac{|\sin x|}{x}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}$$

且 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x}$ 发散，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，由比较判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散.

2. 否. 比如 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}},v_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n}}=1$.

但是 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛（Leibniz 判别法），而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ 中，

$$v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n(\sqrt{n}-(-1)^n)}{n-1}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1},$$

其中 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛，$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散，故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ 发散.

三、多元函数积分计算

1.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 e^{2x}\ln\bigl(1+e^{2x}\bigr)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^{1+e^2} \ln t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\,t(\ln t-1)\Big|_2^{1+e^2} = \frac{1}{2}\left((1+e^2)\left(\ln\bigl(1+e^2\bigr)-1\right)-2(\ln 2-1)\right).
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-c}^0 z\,\mathrm{d}z \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-c}^0 \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)z\,\mathrm{d}z = \pi ab\int_{-c}^0\left(z-\frac{z^3}{c^2}\right)\mathrm{d}z \\
&= \pi ab\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4c^2}\right)\Big|_{-c}^0 = -\frac{\pi}{4}abc^2.
\end{aligned}
$$

3. $C\colon x^2+4y^2=\delta^2$, 顺时针. $I=\int\limits_{L+C}+\int\limits_{C-}$. 设 C 所围区域为 D.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{x^2+4y^2-2x(x+4y)}{(x+4y^2)^2} = \frac{-x^2-8xy+4y^2}{(x+4y^2)^2}, \\
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-(x^2+4y^2)-8y(x-y)}{(x+4y^2)^2} = \frac{-x^2-8xy+4y^2}{(x+4y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

故 $\int\limits_{L+C}=0$, 而

$$
\int\limits_{C-} = \frac{1}{\delta^2}\oint (x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\delta^2}\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\delta^2}\times\frac{\pi\delta^2}{2} = \pi.
$$

所以 $I=\pi$.

4. $I=\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$, 法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$, 则

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = x, \\
\cos\beta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = y, \\
\cos\gamma &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = z.
\end{aligned}
$$

故

$$
I = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_S \mathrm{d}S = \frac{1}{8}\times 4\pi\times 1^2 = \frac{\pi}{2}.
$$

四、条件极值计算

目标函数为 $f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$, 约束条件为 $(x,y,z)\in Ax+By+Cz+D=0$. 由拉格朗日乘数法，设拉格朗日函数为

$$
L(x,y,z,\lambda) = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-\lambda(Ax+By+Cz+D).
$$

则有

$$\begin{cases} L'_x = 2(x-x_0) - A\lambda = 0 \implies x = x_0 + \dfrac{A}{2}\lambda, \\ L'_y = 2(y-y_0) - B\lambda = 0 \implies y = y_0 + \dfrac{B}{2}\lambda, \\ L'_z = 2(z-z_0) - C\lambda = 0 \implies z = z_0 + \dfrac{C}{2}\lambda, \\ L'_\lambda = Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

代入得

$$\frac{1}{2}(A^2+B^2+C^2)\lambda = -(Ax_0+By_0+Cz_0+D),$$
$$\lambda = -\frac{2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}.$$

故

$$f_{\min} = (Ax_0+By_0+Cz_0+D)^2 \cdot \frac{A^2+B^2+C^2}{(A^2+B^2+C^2)^2} = \frac{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)^2}{A^2+B^2+C^2}.$$
$$d_{\min} = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

五、一致收敛

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时，$\forall x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$.

2. $\forall [\alpha,\beta] \subset (a,b)$, $f(x)$ 有一阶连续导函数，故 $f'(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致连续.

$\forall x \in (a,b), f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$, 由拉格朗日中值定理，存在 $\theta_n \in (0,1)$, 使得

$$f_n(x) = n \cdot \frac{1}{n} \cdot f'(x + \frac{\theta_n}{n}) = f'(x + \frac{\theta_n}{n}).$$

因为 $f'(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致连续，故 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, $\forall x', x'' \in [\alpha,\beta]$, 当 $|x'-x''| < \delta$ 时，$|f'(x') - f'(x'')| < \varepsilon$. 而 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时，$\dfrac{\theta_n}{n} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N}$.
故取 $\delta = \dfrac{1}{N}$, $x' = x + \dfrac{\theta_n}{n}$, $x'' = x$, 有 $|x'-x''| < \delta$, 所以 $\left|f'(x+\dfrac{\theta_n}{n}) - f'(x)\right| < \varepsilon$.

所以 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛于 f'.

六、 Fourier 级数

1. 奇延拓后，$a_n = 0, n = 0,1,2,\ldots$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n} \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的 Fourier 级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}\sin nx$. 其在 $[-\pi,\pi]$ 上的取值为

$$\begin{cases} \pi - x, & 0 < x \leqslant \pi, \\ 0, & x = 0, \\ -\pi - x, & -\pi \leqslant x < 0. \end{cases}$$

2. 利用 Cauchy 收敛准则. $|b_n+\cdots+b_{n+p}|=2\left|\dfrac{\sin nx}{n}+\cdots+\dfrac{\sin(n+p)x}{n+p}\right|$.
取 $x=x_0=\dfrac{\pi}{4n}$, $p=n$, $\varepsilon_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 有

$$|b_n+\cdots+b_{n+p}|>2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{n}{2n}=\varepsilon_0.$$

所以 f 的 Fourier 级数在 $(0,\pi)$ 上不一致收敛.

七、多元函数 Taylor 定理

1. $f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\dfrac{\partial}{\partial x}+\Delta y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\dfrac{1}{2!}\left(\Delta x\dfrac{\partial}{\partial x}+\Delta y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)+o(\rho^2)$, 其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

因为 $P_0(x_0,y_0)$ 是稳定点，所以 $\left(\Delta x\dfrac{\partial}{\partial x}+\Delta y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)=0$. 又因为 Hasse 矩阵正定，即有 $Q(\Delta x,\Delta y)=(\Delta x,\Delta y)H(P_0)(\Delta x,\Delta y)^{\mathrm{T}}>0$, 其中

$$H(P_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}_{P_0}$$

进而存在一不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 的常数 $q>0$, 使得 $Q(\Delta x,\Delta y)\geqslant q((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)$.

所以 $\exists\delta>0$, 当 $(x,y)\in U(P_0,\delta)$ 时，有

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)\geqslant((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)(q+o(1))>0.$$

故 $f(x,y)$ 在 P_0 处取极小值.

2. 若 f 存在两个或以上的稳定点，不妨取其中两个 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$, 由多元函数 Taylor 定理的 Lagrange 余项形式，有

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_1,y_1)&=\frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_1+\theta_1\Delta x,y_1+\theta_1\Delta y),\\ f(x,y)-f(x_2,y_2)&=\frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_2+\theta_2\Delta x,y_2+\theta_2\Delta y).\end{aligned}$$

而因为 f 在每个点的 Hasse 矩阵都是正定的, 故 $\dfrac{1}{2}\left(\Delta x\dfrac{\partial}{\partial x}+\Delta y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_1+\theta_1\Delta x,y_1+\theta_1\Delta y)>0$, $\dfrac{1}{2}\left(\Delta x\dfrac{\partial}{\partial x}+\Delta y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_2+\theta_2\Delta x,y_2+\theta_2\Delta y)>0$.

所以就会得出 $f(x_2,y_2)>f(x_1,y_1)$ 且 $f(x_1,y_1)>f(x_2,y_2)$ 的矛盾. 所以 f 至多有一个稳定点.