

数学分析（甲）I（H）2022 秋冬期末

图灵回忆卷

2023 年 2 月 18 日

一、(30 分) 计算:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\cos(\frac{k}{n})}{1 + \sin(\frac{k}{n})}$.

3. 不定积分 $\int \frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2} dx$.

4. $y = \int_{-\sqrt{3}}^x \sqrt{3-t^2} dt$ 在 $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 上的弧长.

5. 反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx$.

二、(10 分) 叙述确界原理, 并使用确界原理证明: 有界函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 存在.

三、(12 分) 已知 $g(x)$ 有二阶连续导数, $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$, 且 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

1. 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 求 a ;

2. 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

四、(10 分) 叙述函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的定义, 并证明 $f(x) = x^{\frac{1}{2023}}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

五、(10 分) 已知连续的非常值函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$, 证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有最大值或最小值.

六、(10 分) 叙述闭区间套定理, 并使用闭区间套定理证明闭区间上连续函数的零点存在性定理: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $f(a)f(b) < 0$, 则 $\exists c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$.

七、(10 分) 已知 $f(x)$ 在 $(-1, 2)$ 上有二阶导数, 且 $f'(\frac{1}{2}) = 0$. 证明:

$$\exists \xi \in (0, 1) \text{ 使得 } |f''(\xi)| \geq 4|f(1) - f(0)|.$$

八、(8 分) 已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶连续导数, 证明:

$$\int_0^1 x^n f(x) dx = \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1) + f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow +\infty)$$