线性代数 II（H）2022-2023 春夏期末

图灵回忆卷

2023 年 6 月 28 日

一、(15 分) 已知 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$，其对应矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2023 & 0 & 0 \\ 6 & 28 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 求 $\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准形（不必求 Jordan 基）;

2. 证明不存在复矩阵 $\mathbf{B}$ 使得 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$.

二、(17 分) 已知直线 $L_1 = \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$，$L_2 = \begin{cases} x=2t \\ y=t+a \\ z=bt+1 \end{cases}$，试确定 a，b 满足的条件使得 L_1，L_2 是:

1. 平行直线;　　**2.** 异面直线.

三、(18 分) 定义在 $V=\mathbb{R}^3$ 上的运算

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_V = x_1y_1 + x_2y_2 + (x_2+x_3)(y_2+y_3)$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

1. 验证 $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个内积;

2. 求 $\mathbb{R}^3$ 在 $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ 下的一组标准正交基;

3. 求 $\boldsymbol{\beta} \in V$ 使得 $\forall \boldsymbol{x} \in V : x_1 + 2x_2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta} \rangle_V$.

四、(15 分) $T \in \mathcal{L}(V)$ 在一组基 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 下的矩阵为

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}) = (\boldsymbol{\varepsilon}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求 V 所有的 T-不变子空间.

五、(20 分) 试给出下列命题的真伪. 若命题为真，请给出简要证明；若命题为假，请举出反例.

1. $T \in \mathcal{L}(V)$. 若子空间 $W \in V$ 在 T 下不变，则其补空间 W' 在 T 下也不变;

2. 定义 $T \in \mathcal{L}(V, W) : Tv = \langle v, \alpha \rangle \beta$, $\beta \in W$ 对 $\forall v \in V$ 成立, 则 $T^*w = \langle w, \beta \rangle \alpha$, $\alpha \in V$ 对 $\forall w \in W$ 成立;

3. $T \in \mathcal{L}(V)$ 是非幂零算子，满足 $\operatorname{null} T^{n-1} \neq \operatorname{null} T^{n-2}$. 则其极小多项式为

$$m(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - a) \qquad 0 \neq a \in \mathbb{R}$$

4. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $\mathbf{S}_1 = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}$，$\mathbf{S}_2 = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}$. 则 $\mathbf{A}$ 是正规矩阵当且仅当 $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_2\mathbf{S}_1$.

5. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是正规矩阵，则 $\mathbf{A}$ 的实部矩阵和虚部矩阵是对称矩阵.

六、**(15 分)** $T \in \mathcal{L}(V)$. 有极分解 $T = S\sqrt{G}$，其中 S 是等距同构，$G = T^*T$. 证明以下条件等价:

1. T 是正规算子;

2. $GS = SG$;

3. G 的所有特征空间 $E(\lambda, G)$ 都是 S-不变的.