线性代数 II（H）2022-2023 春夏期末答案

Shd0wash

2023 年 7 月 2 日

一、幂零算子求 Jordan 标准型，平方根.

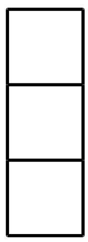
1. 参考谈之奕老师在线性代数 II（H）2020.4.20 那一次课的讲解.

$$G_1(0,\mathbf{A}) \;=\; \text{span}\{(0,0,1)\} \qquad G_2(0,\mathbf{A}) \;=\; \text{span}\{(0,1,0),(0,0,1)\} \qquad G_3(0,\mathbf{A}) \;=\; \mathbb{C}^3$$

从而：

$$G_2(0,\mathbf{A})\backslash G_1(0,\mathbf{A}) \;=\; \text{span}\{(0,1,0)\} \qquad G_3(0,\mathbf{A})\backslash G_2(0,\mathbf{A}) \;=\; \text{span}\{(1,0,0)\}$$

故搭成的梯子如下所示：



对应的 Jordan 标准型就是 1 块 3 阶，如下：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 参考 Linear Algebra Done Right 8.A(6)，采用反证法：
假设存在矩阵 $\mathbf{B}$ 使得 $\mathbf{B}^2 \;=\; \mathbf{A}$，则有：

$$\text{null}\;\;\mathbf{A}^3 \;=\; \text{null}\;\;\mathbf{B}^6 \;=\; \text{null}\;\;\mathbf{B}^4 \;=\; \text{null}\;\;\mathbf{A}^2$$

由上可知这显然不等，故不存在矩阵 $\mathbf{B}$ 使得 $\mathbf{B}^2 \;=\; \mathbf{A}$.

二、直线的位置关系.

形成直线 L_1 的两个平面的法向量为 $\boldsymbol{s}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{s}_2 = (1,-2,0)$.

L_1 的方向向量 $l_1 = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2,1,-3)$.

L_2 的方向向量 $l_2 = (2,1,b)$.

1. L_1 平行于 L_2，则 $\boldsymbol{l}_1 = \lambda \boldsymbol{l}_2$，解得 $\begin{cases} \lambda = 1 \\ b = -3 \end{cases}$.

取 L_1 上一点 $A(0,1,0)$，代入 L_2 方程发现不成立，故 L_1 和 L_2 不重合.

所以，取 $\forall a \in \mathbb{R},\ b=-3$，使得 L_1 平行于 L_2.

2. 判别两直线是否异面的方法：任取 L_1 上一点 A，L_2 上一点 B，构成的向量 $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ 与 $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ 作混合积，若不等于零则两直线异面，若等于零则两直线共面.

取 L_1 上一点 $A(0,1,0)$，L_2 上一点 $B(0,a,1)$. $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ 作混合积得：

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cdot (\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2) = \begin{vmatrix} 0 & a-1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & b \end{vmatrix} = -2(a-1)(b+3) \neq 0$$

解得 $a \neq 1$ 且 $b \neq -3$.

所以取 $a \neq 1,\ b \neq -3$ 时，L_1 和 L_2 异面.

三、内积定义验证，Gram-Schmidt 正交化，Riesz 表示定理.

1. 内积需要验证的性质：

(i) 正定性：$\forall \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_V = x_1^2 + x_2^2 + (x_2+x_3)^2 \geqslant 0$，当且仅当 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$，也就是 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$ 时等号成立.

(ii) 线性性：$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3),\ \boldsymbol{y} = (y_1,y_2,y_3),\ \boldsymbol{z} = (z_1,z_2,z_3),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle_V &= (\alpha x_1 + \beta z_1) y_1 + (\alpha x_2 + \beta z_2) y_2 + ((\alpha x_2 + \beta z_2) + (\alpha x_3 + \beta z_3))(y_2 + y_3) \\ &= \alpha (x_1 y_1 + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)) + \beta (z_1 y_1 + z_2 y_2 + (z_2 + z_3)(y_2 + y_3)) \\ &= \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_V + \beta \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle_V \end{aligned}$$

(iii) （共轭）对称性：$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3),\ \boldsymbol{y} = (y_1,y_2,y_3)$

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_V &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) \\ &= y_1 x_1 + y_2 x_2 + (y_2 + y_3)(x_2 + x_3) \\ &= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle_V \end{aligned}$$

所以，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的内积.

2. 选择自然基 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$，进行 Gram-Schmidt 正交化.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\|\boldsymbol{u}_1\|=1,\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}=(1,0,0)\\ \boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{e}_2-\langle\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1\rangle_V\boldsymbol{\varepsilon}_1=(0,1,0),\|\boldsymbol{u}_2\|=\sqrt{2},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{\boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|}=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)\\ \boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{e}_3-\langle\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_1\rangle_V\boldsymbol{\varepsilon}_1-\langle\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2\rangle_V\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,-\frac{1}{2},1),\|\boldsymbol{u}_3\|=\frac{1}{\sqrt{2}},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\frac{\boldsymbol{u}_3}{\|\boldsymbol{u}_3\|}=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2})\end{aligned}$$

所以，$[\boldsymbol{\varepsilon}]=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 在 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 下的一组标准正交基.

3. 公式为 Linear Algebra Done Right 书中的 6.43.
定义 $\varphi(\boldsymbol{x})=x_1+2x_2,\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$，则 $\boldsymbol{\beta}=\overline{\varphi(\boldsymbol{e}_1)}\boldsymbol{e}_1+\overline{\varphi(\boldsymbol{e}_2)}\boldsymbol{e}_2+\overline{\varphi(\boldsymbol{e}_3)}\boldsymbol{e}_3=(1,2,-2)$
即 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,-2)$ 时，有 $\varphi(\boldsymbol{x})=x_1+2x_2=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}\rangle_V$

四、不变子空间的求法.

设该矩阵为 $\mathbf{A}$，其特征多项式为 $p(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, 解得特征值 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$
对 $\lambda_1=1$, $E(\lambda_1,\mathbf{A})=G(\lambda_1,\mathbf{A})=\mathrm{span}\{(1,0,0)\}$.
而对 $\lambda_2=2$, $E(\lambda_2,\mathbf{A})=\mathrm{span}\{(0,1,0)\}$, $G(\lambda_2,\mathbf{A})=\mathrm{span}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$.
故，所有 T-不变的子空间如下（注意转换回 V 的基）：

(1) $\boldsymbol{\theta}$ (2) $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_1\}$ (3) $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_2\}$ (4) $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2\}$ (5) $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ (6) V

五、真伪判断题.

1. 伪. 由第四题即可构造反例.
正确的结论是：
$\forall T\in L(V)$, 若子空间 $W\in V$ 在 T 下不变，则其补空间 W' 在 T^* 下不变.

2. 真. 证明如下：

$$\begin{aligned}\langle Tv,w\rangle&=\langle\langle v,\alpha\rangle\beta,w\rangle\\&=\langle v,\alpha\rangle\langle\beta,w\rangle\\&=\overline{\langle w,\beta\rangle}\langle v,\alpha\rangle\\&=\langle v,\langle w,\beta\rangle\alpha\rangle\\&=\langle v,T^*w\rangle\end{aligned}$$

即 $\forall v$, $\langle v,T^*w-\langle w,\beta\rangle\alpha\rangle=0$，得 $T^*w=\langle w,\beta\rangle\alpha$, $\forall w$.

3. 真. 证明如下：
因为 T 是非幂零算子，所以 $T^n\neq 0$, null $T^n\neq V$，又 null $T^{n-1}\neq$ null T^{n-2}，结合零空间序列的性质，得 null $T^n=$ null T^{n-1}，且 dim null $T^n=dim$ null $T^{n-1}=n-1$.
又 $V=$ null $T^n\oplus range\ T^n$，从而 $V=$ null $T^{n-1}\oplus range\ T^{n-1}$，null T^{n-1} 即为 $G(0,T)$.
设 $range\ T^{n-1}=U$，则 $dim\ U=1$.
考虑 T 在 $G(0,T)$ 上的限制 $T|_{G(0,T)}$，其为幂零算子，且幂零指数为 $n-1$，故其极小多项式为 $q_1(\lambda)=\lambda^{n-1}$.
考虑 T 在 U 上的限制 $T|_U$，因为 $dim\ U=1$，所以其必有实特征值（定理 9.19）且不为 0.
若为 0，则 $\forall u\in U$, $(T|_U)u=Tu=0$，而 $\forall u\in U$, $\exists v\in V$, $T^{n-1}v=u$，代入得 $\forall v\in V$, $T^nv=0$，与 T 不是幂零算子矛盾.

所以，设其特征值为 $a, 0 \neq a \in \mathbb{R}$，其极小多项式为 $q_2(\lambda) = \lambda - a$.
T 的极小多项式 $q(\lambda) = q_1(\lambda)q_2(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - a)$, $0 \neq a \in \mathbb{R}$

4. 真. 证明如下：
充分性：$\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_2\mathbf{S}_1$，则 $(\mathbf{A}^\mathbf{T} + \mathbf{A})(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\mathbf{T}) = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\mathbf{T})(\mathbf{A}^\mathbf{T} + \mathbf{A})$，展开后得到 $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathbf{T} = \mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{A}$.
又 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，所以 $\mathbf{A}$ 是正规矩阵.
必要性逆推即可.

5. 伪. 本题即使条件加强为自伴依然错误.
如 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}^\mathbf{T}}$ 说明 $\mathbf{A}$ 是自伴的，但其虚部矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 不是对称的.

六、平方根的性质，极分解

(1) $\Rightarrow$ (2)：T 是正规算子，所以 $TT^* = T^*T$. 而由极分解 $T = S\sqrt{G}$，且 $\sqrt{G}$ 是自伴算子有 $\sqrt{G} = \sqrt{G}^*$. $T^* = (S\sqrt{G})^* = \sqrt{G}^*S^* = \sqrt{G}S^*$. 故 $SGS^* = S\sqrt{G}\sqrt{G}S^* = TT^* = T^*T = G$. 又 $S^{-1} = S^*$，所以 $GS = SG$.

(2) $\Rightarrow$ (3)：$GS = SG, \forall v \in E(\lambda, G)$, $Gv = \lambda v$. 而 $GSv = SGv = S\lambda v = \lambda Sv$，所以 Sv 是 G 属于 λ 的特征向量. 从而 G 的所有特征空间 $E(\lambda, G)$ 都是 S-不变的.

(3) $\Rightarrow$ (1)：G 的所有特征空间 $E(\lambda, G)$ 都是 S-不变的，即 $\forall v \in E(\lambda, G)$, $Sv \in E(\lambda, G)$.
也就是 $\forall v \in E(\lambda, G), Gv = \lambda v$, $GSv = \lambda Sv$，从而 $GSv = \lambda Sv = S\lambda v = SGv$, $\forall v$.
从而 $GS = SG$，又 $S^{-1} = S^*$，有 $G = SGS^*$. 进而 $SGS^* = S\sqrt{G}\sqrt{G}S^*$. 而又知道 $\sqrt{G}$ 是自伴的，有 $\sqrt{G} = \sqrt{G}^*$. 所以 $SGS^* = S\sqrt{G}\sqrt{G}^*S^* = S\sqrt{G}(S\sqrt{G})^*$，又有极分解 $T = S\sqrt{G}$，
故 $T^*T = G = SGS^* = TT^*$，所以 T 是正规算子.