21-22 春夏离散郑文庭班第四次小测参考答案

Fairicle

2023 年 6 月 26 日

写在前面：答案仅供参考，不保证正确性。欢迎指出错误和提出修改建议！

1. 略。

2. 四位的回文数就是第 $1,4$ 位相同，第 $2,3$ 位相同。$\mathrm{almost-palindromes}$ 则有两种情况，一是 $1,4$ 相同且 $2,3$ 不同，二是 $1,4$ 不同且 $2,3$ 相同。对第一种情况，有 $9\times 90=810$ 种，对第二种情况，有 $81\times 10=810$ 种，总共有 1620 种。

3. 带入 $n=2,3,4$ 得到三个方程，解得 $c_1=3, c_2=-2, c_3=1$。故递推关系为 $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}+1$。

对 $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$：$r^2-3r+2=0, r_1=1, r_2=2$。

所以通解 $f(n)=\alpha 2^n+\beta$。

对 $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}+1$ 的特解：$1=n^0\times 1^n$，且 1 是特征方程重数为 1 的根，所以特解 $g(n)=np_0$。

带入递推方程，解得 $p_0=-1$。故 $a_n=f(n)+g(n)=\alpha 2^n+\beta-n$。让 $n=0,1$ 可求得 $\alpha=2,\beta=-2$。

所以 $a_n=2^{n+1}-n-2$。

另解：求出系数后，方程可写成 $(a_n-a_{n-1})=2(a_{n-1}-a_{n-2})$ 的形式。过程略。

4.

(a) 有欧拉回路 $\iff$ 所有点度数都为偶数，已知只有 $m=n=1$ 时满足。

(b) 有欧拉路径但没有欧拉回路 $\iff$ 有且仅有两个点度数为奇数。把不在边界上的点定义为内点，可以发现所有内点度数都是 4 为偶数。对于边界上的点，除了在四个角上的点度数为 2 之外，其他点的度数都为 3。非角上的边界点有 $n-1+m-1+n-1+m-1=2n+2m-4$ 个。$2n+2m-4=2 \iff n+m=3$，又因为 $m\le n$，所以只有 $n=2,m=1$ 时成立。

(c) 当 m,n 不全为偶数时有哈密顿回路。可行性易通过找到一条哈密顿回路证明。下证 m,n 均为偶数时没有哈密顿回路。m,n 均为偶数时，总共有 $(m+1)\times(n+1)$ 个节点，可以通过去掉其中的 $\frac{(m+1)\times(n+1)-1}{2}$ 个节点使其完全不连通，也就是剩下了 $\frac{(m+1)\times(n+1)+1}{2}$ 个连通分量，由于连通分量大于删去节点数，所以没有哈密顿回路。$n=2,m=2$ 时的删点方法如图一，图二。**就是隔一个点删一个**，n,m 取其他值时完全类似。

(d) 任意正整数 $n,m(m\le n)$ 都有哈密顿回路，所以除去 (c) 中的情况即可。即，n,m 均为偶数时。

(e) $G_{1,2}$ 有 7 条边，删去两条边才可能成为生成树。删边方案有 $C_7^2=21$ 种。减去不合法的方案（删边后形成的图不是树）共 6 种，所以有 15 种生成树。

另解： 使用矩阵树定理。矩阵树定理没有必要掌握，而且要不小的计算量，还容易算错。过程略。

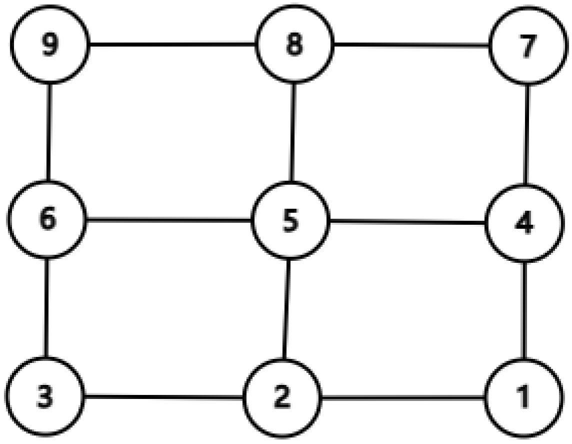

图 1

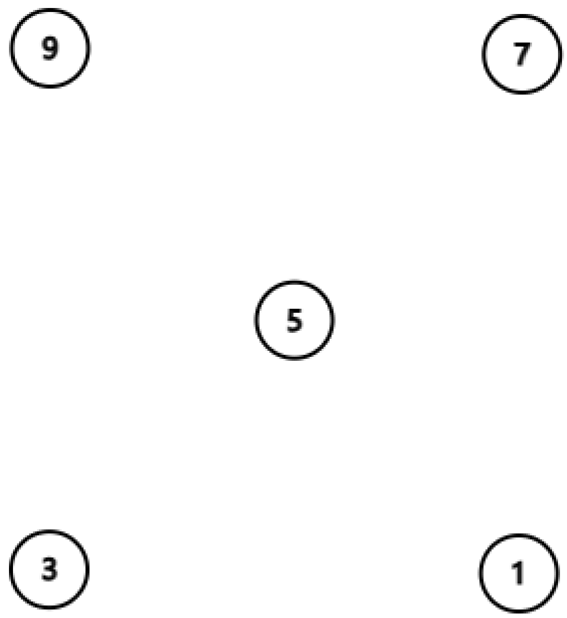

图 2

5.

(a) 均为平面图。图略。

(b) $4; 2; 3$。

(c) 不想写证明了，放几个。[来自知乎的一个证明](#) [stackexchange 上关于这个问题的讨论](#)

6. 若 n 是 Fibonacci 数，易证。若 n 不是 Fibonacci 数，记 $n_1 = n$，一定能找到唯一的 k_1 使得 $F_{k_1-1} < n_1 < F_{k_1}$。记 $n_2 = n_1 - F_{k_1-1}$，若 n_2 是 Fibonacci 数，那么 $n = n_2 + F_{k_1-1}$。否则，有 $n_2 = n_1 - F_{k_1-1} < F_{k_1} - F_{k_1-1} = F_{k_1-2}$，从而能找到**唯一的比** k_1 **小的** k_2 使得 $F_{k_2-1} < n_2 < F_{k_2}$。同理令 $n_3 = n_2 - F_{k_2-1}$，一直这样做下去。

由于 k_i 的**单调递减性**，最后一定有 n_i 为 Fibonacci 数或者 $n_i <= 3$，而 $1, 2, 3$ 都是 Fibonacci 数，所以最后一定存在 i 使得 n_i 为 Fibonacci 数，n 可写成 $n = F_{k_1-1} + F_{k_2-1} + \ldots + F_{k_{i-1}-1} + n_i$。证毕。

也可以参考[知乎这个问题下的回答](#)，有更多高观点的证明。